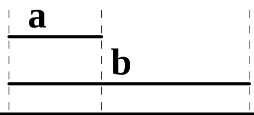
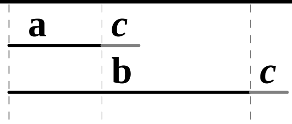
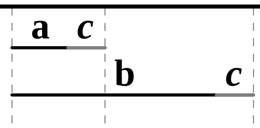
LES INEQUATIONS DU 1er DEGRE A UNE INCONNUE

1. Effets de l'addition et de la multiplication sur l'ordre

Activité n°1 :

Comparer la longueur des segments en complétant les inégalité avec les symboles « < » ou « > ».

	a …. b	b …. a
	a + **c** …. b + **c**	b + **c** …. a + **c**
	a – **c** …. b – **c**	b – **c** …. a – **c**

Conclusion :

Le sens de l'inégalité est-il modifié lorsqu'on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres de l'inégalité ? Réponse : Le sens de l'inégalité est conservé.

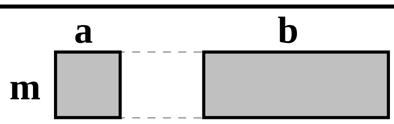
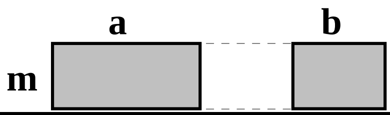
On retiendra :

Si on additionne ou soustrait un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens : **Si $a \leq b$ alors : $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$**

Activité n°2 :

Soit m un nombre **positif**.

Comparer les **longueurs** puis les **aires** des rectangles suivants (de même largeur m) en complétant les inégalités avec les symboles « < » ou « > ».

	Longueurs	Aires des rectangles
	a …. b	m×a …. m×b
	a …. b	m×a …. m×b

Conclusion :

Le sens de l'inégalité est-il modifié lorsqu'on multiplie par un même **nombre positif** les deux membres de l'inégalité ? Réponse : Le sens de l'inégalité est conservé.

Activité n°2 (suite) :

Que se passe-t-il si on multiplie les membres d'une inégalité par un nombre **négatif** ?

Compléter le tableau suivant :

a	b	m	Calcul de m×a	Calcul de m×b	Comparaison de a et b	Comparaison de ma et mb
5	2	-3	…………..	…………..	a …. b	m×a …. m×b
15	7	-10	…………..	…………..	a …. b	m×a …. m×b
20	10	-5,5	…………..	…………..	a …. b	m×a …. m×b
21	33	$-\frac{1}{3}$	…………..	…………..	a …. b	m×a …. m×b

Conclusion :

Que se passe-t-il pour le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie par un même **nombre négatif** les deux membres de l'inégalité ? Réponse : Le sens de l'inégalité est inversé.

On retiendra :
Si on multiplie ou divise par un même nombre les deux membres d'une inégalité, le sens de cette **inégalité dépend du signe de ce nombre :**

- **Si a < b et k strictement positif alors le sens est conservé : ka < kb**
- **Si a < b et k strictement négatif alors le sens est inversé : ka > kb**

2. La notion d'inéquation

Activité :
Acheté chaque mois, un magazine coûte 4,15 €.

a. Compléter le tableau ci-dessous en calculant le coût total selon le nombre de magazines achetés dans l'année.

Nombre x de magazines achetés	4	6	8	9	11
Coût total en €					

b. L'abonnement annuel pour 12 numéros coûte 37 €. Pour quelles quantités de numéros achetés individuellement l'abonnement est-il plus avantageux ?

c. Par quelle inégalité peut-on traduire la question précédente ?

Réponse :

b. Comme $9 \times 4{,}15 = 37{,}35$ on peut affirmer que : A partir de 9 numéros achetés individuellement l'abonnement est plus intéressant c'est-à-dire pour les quantités 9 ; 10 ; 11 et 12.

c. La question peut se traduire par l'inégalité : $4{,}15\,x > 37$ c'est-à-dire « coût total » > « abonnement »

Bilan de l'activité :

- L'inégalité $4{,}15\,x < 37$ où x désigne des valeurs inconnues est appelée **une inéquation**.
- **Résoudre cette inéquation**, c'est trouver les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vraie.
- Ces valeurs s'appellent les **solutions de l'inéquation**.

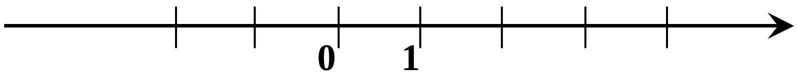
3. Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une inéquation

Activité :

a. Traduire par une question l'inéquation « $x \leq 2$ ».

b. Proposer cinq solutions de cette inéquation. Proposer trois nombres qui ne vérifient pas cette inéquation.

c. Hachurer la partie de la droite graduée représentant tous les nombres qui ne vérifient pas cette inéquation.



Réponse :

a. L'inéquation se traduit par la question : « Quels sont les nombres inférieurs ou égaux à 2 ?

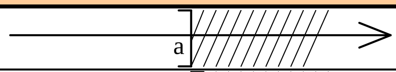
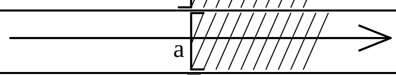
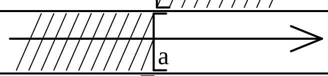
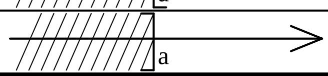
b. Cinq solutions : 0 ; 1,5 ; 2 ; -1 ; -1000 Trois nombres non solutions : 3 ; 2,5 ; 1000

c. Les nombres qui ne vérifient pas l'inéquation sont tous ceux strictement supérieurs à 2.

d. Ainsi on hachure la partie de l'axe qui n'est pas solution c'est-à-dire, à droite depuis le nombre 2.

On retiendra :
L'ensemble des solutions d'une inéquation est représenté par la partie non hachurée d'un axe gradué.

Plus généralement :
Après transformations, une inéquation s'écrit finalement sous une des 4 formes du tableau :

Inéquations après transformations	Représentation graphique de l'ensemble des solutions
$x \leq a$	
$x < a$	
$x \geq a$	
$x > a$	

Position du crochet :

- Avec les symboles « ≤ » et « ≥ » le nombre « a » appartient à l'ensemble des solutions donc le crochet positionné en « a » est dirigé vers la partie solution.
- Avec les symboles « < » et « > » le nombre « a » n'appartient pas à l'ensemble des solutions donc le crochet positionné en « a » est dirigé vers la partie hachurée.

4. Les transformations d'une inéquation pour la résolution

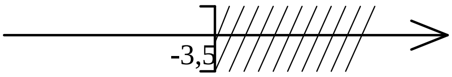
Exemple de résolution d'inéquation :

Soit l'inéquation $-2x - 3 \geq 4$.
Il s'agit de déterminer toutes les valeurs de l'inconnue x pour lesquelles l'inégalité est vraie.
Pour cela on transforme l'inéquation jusqu'à obtenir l'une des quatre formes du tableau précédent.

- Pour « neutraliser -3 », on ajoute 3 à chaque membre : $-2x - 3 + 3 \geq 4 + 3$ soit $-2x \geq 7$
- Pour « neutraliser -2 », on divise par -2 chaque membre en changeant le sens de l'inégalité : $x \leq -\frac{7}{2}$

Les solutions sont donc tous les nombres inférieurs ou égaux à -3,5.

On peut représenter graphiquement les solutions par :



On retiendra :

- **Transformer une inéquation permet de trouver ses solutions.**
- **<u>Les différentes transformations</u>** possibles d'une inéquation en une inéquation qui possèdent les mêmes solutions sont :
  - **ajouter ou en retrancher** un même nombre aux deux membres **<u>sans changer le sens de l'inégalité</u>**
  - **multiplier ou en diviser** par un même nombre les deux membres et **le sens de l'inégalité est** :
    - **conservé si ce nombre est strictement positif**
    - **inversé si ce nombre est strictement négatif**