CALCUL ALGEBRIQUE

1. Calcul de la valeur d'une expression littérale

Définition :
Une expression littérale est constituée de nombres et de lettres reliés par des opérations.

Exemple : $7 + 3ax - 2y^2$ Cette expression signifie : $7 + 3\times a\times x - 2\times y^2$

Définition :
Une formule littérale est une égalité construite pour calculer une grandeur.

Exemple : $A = \pi\times R^2$ est la formule qui permet le calcul de l'aire d'un disque de rayon R.

Pour calculer la valeur numérique d'une expression ou d'une formule littérale, on remplace les lettres par les nombres puis on effectue les calculs.

Exemples :

Si $B = 3x^2 - 5x + 2$
alors la valeur numérique de A pour $\mathbf{x = 0{,}5}$ est :
$B = 3\times0{,}5^2 - 5\times0{,}5 + 2$
$B = 3\times0{,}25 - 2{,}5 + 2$
$B = 0{,}75 - 2{,}5 + 2$
$B = 0{,}25$

Si $h = \frac{1}{2} g\, t^2$ avec $g = 9{,}8$ et $t = 2$
alors la valeur numérique de h est :
$h = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 2^2$
$h = 0{,}5\times 9{,}8 \times 4$
$h = 19{,}6$

2. Réduire une expression littérale

Réduire une expression littérale c'est la transformer en une écriture **moins volumineuse en additionnant les termes semblables**.

Exemple :
$A = 3a + 3 + 5a - 1 - 2a + 4$
On regroupe les termes en « a » ensemble et les nombres « seuls » ensemble.
$A = \underbrace{3a + 5a - 2a} + \underbrace{3 - 1 + 4}$
$A = 6a + 6$

3. Supprimer les parenthèses dans les sommes et différences

La règle est la suivante :

- Lorsque les parenthèses sont précédées du signe « + », on peut les supprimer.
- Lorsque les parenthèses sont précédées du signe « – », on peut les supprimer à condition de changer le signe de chacun des termes placés dans les parenthèses.

Exemples :

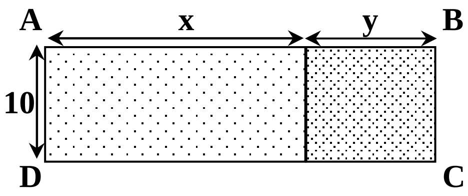
$A = 5 + (-2a - 3 + b)$
$A = 5 - 2a - 3 + b$
$A = 2 - 2a + b$

$B = 5 - (-2a - 3 + b)$
$B = 5 + 2a + 3 - b$
$B = 8 + 2a - b$

Signe + devant les parenthèses	Signe – devant les parenthèses
$a + (-b) = a - b$	$a - (-b) = a+b$
$a + (b+c) = a + b + c$	$a - (b+c) = a - b - c$
$a + (b-c) = a + b - c$	$a - (b-c) = a - b + c$

4. Développer, factoriser une expression littérale

Exemple :



L'aire du rectangle **ABCD** peut s'écrire sous la forme d'un produit (multiplication de deux expressions) :

$Aire_{ABCD}$ = Longueur $\times$ Largeur = $(x + y) \times 10$

L'aire de ce rectangle peut aussi s'écrire sous la forme d'une somme (addition):

$Aire_{ABCD} = Aire_{(1er\ rectangle)} + Aire_{(2ème\ rectangle)} = x \times 10 + y \times 10$

Conclusion : $\underbrace{(x + y) \times 10}_{\text{Expression factorisée}} = \underbrace{x \times 10 + y \times 10}_{\text{Expression développée}}$

On retiendra :

La distributivité de la multiplication permet de développer ou factoriser une expression littérale :

Forme factorisée $\Rightarrow$ **a (b + c) = ab+ac** $\Leftarrow$ **Forme Développée**

Exemples : $13\,(2x + y – 3) = 13\times2x + 13\times y + 13\times(-3)$

$= 26x + 13y – 39$

Exemples : $-5\,(-7x + 9y + 5) = (-5)\times(-7x) + (-5)\times9y + (-5)\times5$

$= 35x – 45 – 25$

Règle des signes

×	+	–
+	+	–
–	–	+

Les identités remarquables

a. Carré d'une somme

a	b	a + b	$(a+b)^2$	a^2	2ab	b^2	$a^2+2ab+b^2$
3	5						
7	11						
2	6						
3	3						

Conclusion : $(a+b)^2$ = ………………………..

b. Carré d'une différence

a	b	a – b	$(a–b)^2$	a^2	2ab	b^2	$a^2–2ab+b^2$
8	3						
2	1						
5	2						
10	1						

Conclusion : $(a–b)^2$ = ………………………..

c. Produit d'une somme de deux nombres par la différence de ces nombres

a	b	a + b	a – b	(a + b)(a – b)	a^2	b^2	$a^2 – b^2$
5	3						
11	7						
2	6						
3	3						

Conclusion : ………….………….. = ………………………..

5. Méthode de développement

Développer c'est transformer un produit en une somme ou différence grâce à la distributivité de la multiplication ou grâce aux identités remarquables.

Exemple de développement grâce à la distributivité de la multiplication

Forme factorisée ⇒ $(a + b)\,(c + d) = \overset{①}{a\times c} + \overset{②}{a\times d} + \overset{③}{b\times c} + \overset{④}{b\times d}$ ⇐ **Forme Développée**

Exemples :

$$(x - 7)\,(y - 3) = \overset{①}{x\times y} + \overset{②}{x\times(-3)} - \overset{③}{7\times y} - \overset{④}{7\times(-3)}$$

$$= xy - 3x - 7y + 21$$

« Le produit est devenu une somme. »

Exemple de développement d'un produit remarquable

Forme factorisée ⇒ $(a + b)^2 = \overset{①}{a^2} + \overset{②}{2\times a\times b} + \overset{③}{b^2}$ ⇐ **Forme Développée**

$$(3x + 5)^2 = x\times x + 2\times x\times 5 + 5^2$$

$$= x^2 + 10\times x + 25$$

« Le produit est devenu une somme. »

Forme factorisée ⇒ $(a - b)^2 = \overset{①}{a^2} - \overset{②}{2\times a\times b} + \overset{③}{b^2}$ ⇐ **Forme Développée**

$$(x - 8)^2 = \overset{①}{x^2} - \overset{②}{2\times x\times 8} + \overset{③}{8^2}$$

$$= x^2 - 2\times 8\times x + 64$$

$$= x^2 - 16x + 64$$

« Le produit est devenu une somme. »

6. Méthode de factorisation

Factoriser c'est transformer une expression littérale en produit de facteurs.
Il faut soit utiliser une identité remarquable soit faire apparaître un facteur commun.

Exemple n°1 : Recherche d'un facteur commun simple

A = 3a + 5ab –7ka + a3x
La lettre « **a** » apparaît dans chacun des facteurs : A = 3**a** + 5**a**b –7k**a** + **a**3x
On peut alors écrire cette somme en produit : A = **a** (3 + 5b –7k + 3x)

Exemple n°2 : Recherche d'un facteur commun multiple

B = 8xyz – 4xaz + 2zbx – 16xz
Il s'agit d'une somme où le facteur commun est **2xz** : A = **2xz** × 4y – **2xz** × a + **2xz** × b – **2xz** × 8
On peut alors écrire cette somme en produit : A = **2xz** (4y – a + b – 8)

Exemple n°3 : Recherche d'un facteur commun multiple

C = 5y + 15xy – 10yk
On peut faire apparaître la lettre « y » mais aussi le facteur **5** : A = **5y**×1 + **5y**×3x – **5y**×2k
On peut alors écrire cette somme en produit : A = **5y** (1 + 3x – 2k)

Exemple n°4 : Utiliser une identité remarquable

$D = 25\,x^2 - 20\,x + 4$

On peut faire apparaître un développement d'une identité remarquable :

$D = 5^2 \times x^2 \quad - 2 \times 5 \times 2 \times x \quad + 2^2$

$D = (5x)^2 \quad - 2 \times 5x \times 2 \quad + 2^2$

D s'écrit sous la forme du développement :

$D = \quad a^2 \quad - 2 \quad a\,b \quad + \; b^2$

On identifie a et b : $a = 5x$ et $b = 2$

On utilise l'identité $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ pour factoriser :

$D = (5x - 2)^2$