BAC PRO 1	MATHEMATIQUES	ALGÈBRE
	EQUATIONS DU 2^{ND} DEGRÉ	**A 10**

1. DEFINITION.

On appelle équation du second degré d'inconnue x toute équation du type :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

a, b, et c sont les coefficients (nombres réels), $a \neq 0$.

Remarque :

L'expression $a\,x^2 + b\,x + c$ est appelée polynôme du second degré ou encore trinôme du second degré.

Résoudre ce type d'équation, c'est trouver, si elles existent la ou les valeurs que l'on doit donner à l'inconnue pour que l'égalité obtenue soit vraie.

2. RESOLUTION DE L'EQUATION DU SECOND DEGRÉ.

Soit une équation du type : $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

METHODE DE RESOLUTION

- On calcule ***le discriminant.*** $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$

- Trois possibilités :

Si $\Delta \geq 0$ alors il y a deux racines:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$ une seule solution

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta \leq 0$ Aucune solution.

Remarque : Les solutions de l'équation sont aussi appelées **racines** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 \quad \text{donc 2 solutions}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{6+2}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{6-2}{2} = 2$$

réponse $\{2;4\}$

EXERCICES

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes

1. $x^2 + x - 2 = 0$
2. $x^2 - 5x + 7 = 0$
3. $4x^2 + 12x + 9 = 0$
4. $x^2 + x - 3 = 0$
5. $x^2 - 6x + 7 = 0$
6. $9x^2 - 6x + 1 = 0$
7. $2x^2 + 9x = -7$
8. $x^2 + x = 20$
9. $3x^2 - 5x = -11$
10. $2x^2 + 9x = -7$
11. $4t^2 = t - 3$
12. $-2t^2 = 1 - 3t$
13. $28t - 49 = 4t^2$

Exercice 2 : Résoudre les problèmes suivants

1.Déterminer la somme de deux nombres entiers consécutifs sachant que la somme de leurs carrés est 2 813.

2.Trouver un nombre sachant que si l'on ajoute 10 à son triple, on obtient son carré.

3.Des élèves veulent faire un voyage. Le transporteur a fait un prix global 1 200 F. Quatre élèves supplémentaires s'ajoutent à cette sortie et chacun paie ainsi 10 F de moins.
Quel est le nombre d'élèves participant à cette excursion ? .

4.Une dette de 1 000 F doit être payée par plusieurs personnes, mais deux d'entre elles ne peuvent pas payer. La dette de chacune des autres est alors augmentée de 25 F.
Combien y a t'il de personnes solvables ? .

3. DEMONSTRATION DE LA MÉTHODE DE RÉSOLUTION PAR LE DISCRIMINANT.

1. Remarque : Dans la leçon précédente nous avons appris à résoudre une équation produit du type $(x + a)(x + b)$ avec a et b réels donnés.

Exemple : résoudre l'équation $(x + 2)(x - 3) = 0$ donne deux solutions $x = -2$ et $x = 3$.
d'autre part on a aussi $(x + 2)(x - 3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 + x - 6$.

Nous savons donc déjà résoudre une équation du second degré à condition que celle ci soit écrite sous sa forme factorisée.

Pour mettre en œuvre la démonstration de la méthode de résolution d'une équation du second degré par le discriminant il faut donc avoir comme objectif de chercher la forme factorisée de l'équation.

➢ **Exemple : Résolution de l'équation :** $\mathbf{x^2 - 4x + 3 = 0}$

Cherchons la forme factorisée de ce polynôme.

On remarque que : $x^2 - 4x$ est le début du développement de $(x - 2)^2$ → soit $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ donc $x^2 - 4x = \boldsymbol{(x+2)^2 - 4}$

Donc notre équation peut s'écrire : → $x^2 - 4x + 3 = \boldsymbol{(x-2)^2 - 4} + 3$

Qui peut se réduire à → $(x - 2)^2 - 1$

Cette expression est du type de l'identité remarquable
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Avec $a = (x - 2)$ et $b = 1$
→ soit ici $(x - 2)^2 - 1 = (x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = (x - 1)(x - 3)$

D'où on peut trouver les solutions de l'équation → $(x - 1)(x - 3) = 0$ soit $x - 1 = 0$ d'où $\boxed{x = 1}$
$x - 3 = 0$ d'où $\boxed{x = 3}$

On notera aussi que : $\mathbf{x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)}$

➢ **Cas général : Résolution d'une équation du type** $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Pour la résolution du cas général, le coefficient a est mis en facteur afin de faciliter les calculs.

L'expression devient : $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

Factorisons $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

On a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\times\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

Soit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x$

D'où l'équation devient $$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

soit $$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

d'où $$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

On pose alors : $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ est appelé le discriminant)

Notre équation est devenue : $$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

Elle est alors sur le modèle de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b) (a + b)$
Elle est donc factorisable

Trois cas se présentent alors :

1. **Si $\Delta > 0$ l'expression s'écrit :**

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] = 0$$

d'où $$\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] = 0$$

soit $$\left[x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right] = 0$$

l'équation admet donc deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

L'expression factorisée de $ax^2 + bx + c$ est $a (x - x_1) (x - x_2)$

2. **Si $\Delta = 0$ l'expression s'écrit :**

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$$

soit $x + \frac{b}{2a} = 0$ d'où $x = \frac{-b}{2a}$

L'expression factorisée de $a x^2 + b x + c$ est alors $a \left(x - x_1 \right)^2$

3. **Si $\Delta < 0$ l'expression** $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\sqrt{\Delta}}{4a^2}$ n'est pas factorisable car $\sqrt{\Delta}$ est impossible

4. FACTORISATION D'UN POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ.

Si $\Delta > 0$, $a x^2 + b x + c$ a deux racines x_1 et x_2 :

$$\mathbf{a x^2 + b x + c = a (x - x_1) (x - x_2)}$$

Si $\Delta = 0$, $a x^2 + b x + c$ a une racine x_1

$$\mathbf{a x^2 + b x + c = a (x - x_1)^2}$$

Si $\Delta < 0$, $a x^2 + b x + c$ n'a pas de racine, il n'est pas factorisable.

Exemple : Factoriser le polynôme $3 x^2 + 7 x - 20$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$$

Donc 2 racines $x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{289}}{2\times 3} = \dfrac{17-7}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

$$x_2 = \frac{-7-\sqrt{289}}{2\times 3} = \frac{-7-17}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

Par conséquent : $3x^2 + 7x - 20 = 3 (x + 4) (x - \frac{5}{3}) = (x + 4) (3 x - 5)$

5. SYSTEME D'EQUATIONS COMPORTANT LE PRODUIT DES DEUX INCONNUES OU LEUR CARRÉ.

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues faisant intervenir leur produit ou leur carré, on utilise la « méthode par substitution »

.Exemple : Recherchons deux nombres dont le produit est 6 et la somme est 5.

1. Notons x et y les nombres recherchés
2. Mise en équations :

$$\begin{cases} xy = 6 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

- de (2) on tire $y = 5 - x$
- On remplace y par cette valeur dans l'équation (1).

$$x (5 - x) = 6$$

- soit $5 x - x^2 = 6$ d'où $x^2 - 5 x + 6 = 0$
- après recherche des racines par le discriminant on trouve $x' = 2$ $x'' = 3$
- Les nombres sont donc $x = 2$ et $y = 3$.

6. INEQUATION DU SECOND DEGRE.

Etude du signe d'un trinôme du type $a x^2 + b x + c$

Cas ou $\Delta = 0$.

Exemple : Recherche du signe du polynôme $2 x^2 - 5 x - 3$

Factorisons ce polynôme. Les racines sont $x_1 = -0,5$ et $x_2 = 3$

le polynôme peut donc s'écrire $2 \ (x + 0,5) \ (x - 3)$

Construisons un tableau des signes :

x		- 0,5		3	
x + 0,5	-	0	+		+
x – 3	-		-	0	+
(x + 0,5) (x – 3)	+	0	-	0	+
2 (x – 0,5) (x – 3)	+	0	-	0	+
2 x² - 5 x - 3	+	0	-	0	+

Le polynôme est positif sur les intervalles $]-\infty\,;-0,5[$ et $[3\,;+\infty[$.

Exercice d'application :
La relation : $P = -0,5 \ I^2 + 4,5 \ I$ exprime la puissance électrique P (Watt) fournie par une pile en fonction de l'intensité I (ampère) qui la traverse.
Rechercher pour quelles intensités le puissance de cette pile est elle inférieure à 4 watts.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

x	
Signe de 05 x² + 4,5 x - 4	

Conclusion : ……………………………………………………………………………………………..