# INITIATION AUX PROBABILITES

## 1 . Vocabulaire

### 1 . 1 . Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats sont liés au hasard.

Exemple : le tirage d'une carte à jouer.

### 1 . 2 . Evènement

Un événement élémentaire est le résultat d'une expérience aléatoire.

Exemple : l'événement "as de trèfle" est un événement élémentaire de l'expérience aléatoire "tirer une carte".

## 2 . Probabilité

### 2 . 1 . Définition

Dans une expérience aléatoire, on associe à chaque événement élémentaire sa probabilité : c'est le rapport entre le nombres de cas favorables et le nombre de cas possibles.

Exemple : événement "as de trèfle". Nombre de cas favorable : 1. Nombre de cas possibles : 32 (pour un jeu de 32 cartes). On en déduit que : P("as de trèfle") = $\frac{1}{32}$.

### 2 . 2 . Propriétés

- La probabilité d'un événement A est toujours comprise entre 0 et 1 : $0 \leq P(A) \leq 1$.
  Si $P(A) = 0$ : l'événement A ne se produit pas, il est impossible.
  Si $P(A) = 1$, l'événement se produit systématiquement.
- La somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1.
- Si tous les évènements ont la même probabilité (ils sont équiprobables), alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

- L'événement contraire de A est noté $\overline{A}$.
- La somme de la probabilité d'un événement et de la probabilité de son contraire est égale à 1 :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

## 2 . 3 . Exemples

On considère un jeu de 32 cartes.

• Evènement A : tirer le roi de cœur. Les cas sont équiprobables.

Nombre de cas favorables : 1. Nombre de cas possibles : 32.

$P(A) = \frac{1}{32}$.

• Evènement B : ne pas tirer le roi de cœur. Les cas sont équiprobables.

C'est l'événement contraire de A, donc $P(B) = P(\overline{A})$, donc $P(B) = 1 - P(A)$, donc $P(B) = \frac{31}{32}$.

• Evènement C : tirer les 4 as. Les cas sont équiprobables.

Nombre de cas favorables : 4. Nombre de cas possibles : 32.

$P(C) = \frac{4}{32}$, donc $P(C) = \frac{1}{8}$.

• Evènement D : tirer toutes les cartes de carreau. Les cas sont équiprobables.

Nombre de cas favorables : 8. Nombre de cas possibles : 32.

$P(D) = \frac{8}{32}$, donc $P(D) = \frac{1}{4}$.

# 3 . Loi de probabilité

## 3 . 1 . Définition

La fonction $x_i \longmapsto P(X = x_i)$ définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$P(X = x_i)$ se lit "probabilité pour que X prenne la valeur $x_i$".

A chaque valeur $x_i$ que peut prendre la variable X, on associe sa probabilité $p_i$. L'ensemble des couples $(x_i ; p_i)$ est la loi de probabilité de la variable X.

Exemple : on lance un dé équilibré. Les cas sont équiprobables. La variable peut prendre les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ et $x_6 = 6$. A chaque valeur $x_i$, on associe une probabilité $p_i$ telle que $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{6}$, $p_3 = \frac{1}{6}$, $p_4 = \frac{1}{6}$, $p_5 = \frac{1}{6}$ et $p_6 = \frac{1}{6}$.

## 3 . 2 . Fonction de répartition de la variable

La fonction $x_i \longmapsto P(X \leq x_i)$ est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X.

$P(X \leq x_i)$ se lit "probabilité pour que X ait une valeur inférieure à $x_i$".

La fonction de répartition se représente par la courbe des probabilités cumulées croissantes.

Remarque : on peut rapprocher les effectifs cumulés croissants calculés sur une série statistique avec la fonction de répartition.

## 3 . 3 . Espérance mathématique

L'espérance mathématique E(X), ou m, d'une variable aléatoire X est donnée par la relation :

$$E(X) = m = \sum_{i=1}^{i=n} x_i\, p_i \ .$$

Remarque : on peut rapprocher l'espérance mathématique d'une variable aléatoire avec la moyenne des données d'une série statistique.

## 3 . 4 . Variance

La variance V(X) de la variable aléatoire X est donnée par une des deux relations suivantes :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \left(x_i - m\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, x_i^2 - m^2$$

## 3 . 5 . Ecart type

L'écart type σ(X) d'une variable aléatoire X est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \ .$$

L'écart type donne la dispersion des valeurs de la variable aléatoire X par rapport à l'espérance mathématique E(X) ou m.

## 3 . 6 . Exemple récapitulatif

Une société a établi une statistique sur les interventions nécessaires à la maintenance des machines pendant un an (50 machines identiques). Elle a obtenu le tableau ci-dessous :

| Nombre d'interventions $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de machines $n_i$ | 4 | 25 | 12 | 6 | 3 |

1 . On souhaite calculer la probabilité qu'une machine prise au hasard ait subi deux interventions.

Les cas sont équiprobables.

Le nombre de cas favorables est 12.

Le nombre de cas possibles est 50.

On a donc $P(X = 2) = \frac{12}{50}$, soit $P(X = 2) = 0{,}24$.

2 . On peut établir le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

| Valeurs de X : $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,08 | 0,50 | 0,24 | 0,12 | 0,06 |

3 . On souhaite déterminer la probabilité qu'une machine subisse au plus deux interventions.

La machine peut subir 0 intervention : $P(X = 0)$, 1 intervention : $P(X = 1)$, ou 2 interventions : $P(X = 2)$.

On a donc $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$, donc $P(X \leq 2) = 00{,}08 + 0{,}50 + 0{,}24$, soit $P(X \leq 2) = 0{,}82$.

4 . On peut dresser le tableau de la fonction de répartition :

| Valeurs de X : $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X \leq x_i)$ | 0,08 | 0,58 | 0,82 | 0,94 | 1 |

5 . On souhaite calculer l'espérance mathématique E(X) pour la variable aléatoire X.

On dresse le tableau suivant :

| Valeurs de X : $x_i$ | $P(X = x_i) = p_i$ | $x_i \times p_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,08 | 0 |
| 1 | 0,50 | 0,5 |
| 2 | 0,24 | 0,48 |
| 3 | 0,12 | 0,36 |
| 4 | 0,06 | 0,24 |
| | 1 | 1,58 |

On en déduit que $E(X) = m = 1{,}58$.

Ce nombre représente le nombre "moyen" d'interventions auquel on peut s'attendre sur une machine.

6 . On peut calculer l'écart type de la variable aléatoire X : on calcule la variance à l'aide du tableau suivant :

| Valeurs de X : $x_i$ | $P(X = x_i) = p_i$ | $x_i \times p_i$ | $p_i \times (x_i - m)^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,08 | 0 | 0,199 712 |
| 1 | 0,50 | 0,5 | 0,168 2 |
| 2 | 0,24 | 0,48 | 0,042 336 |
| 3 | 0,12 | 0,36 | 0,241 968 |
| 4 | 0,06 | 0,24 | 0,351 384 |
| | 1 | 1,58 | 1,003 6 |

On en déduit $\sigma(X) = \sqrt{1{,}003\,6}$, soit $\sigma(X) = 1{,}002$.

Remarque : tous les calculs précédents peuvent se faire à l'aide de la calculatrice en mode statistique.

# 4 . La loi normale

## 4 . 1 . Définition

Un grand nombre de variables aléatoires suivent la loi normale $\mathcal{N}(m\ ;\ \sigma)$, ou loi de Laplace–Gauss.

Cette loi normale est représentée par une courbe de Gauss ou courbe en cloche représentée ci dessous.

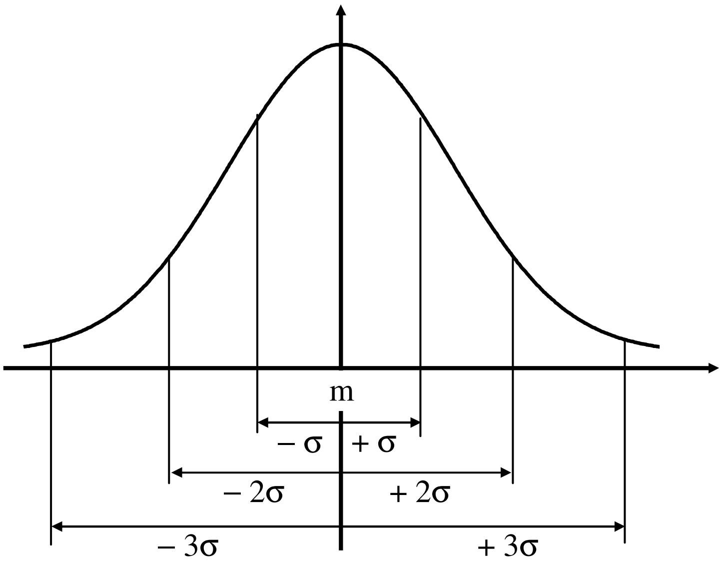
Remarque :

$P(m - \sigma) \leq X \leq P(m + \sigma) = 0{,}68$

$P(m - 2\sigma) \leq X \leq P(m + 2\sigma) = 0{,}95$

$P(m - 3\sigma) \leq X \leq P(m + 3\sigma) = 0{,}98$

Ceci signifie que 98 % des valeurs d'une variable aléatoire X suivant une loi normale se trouvent dans l'intervalle $[m - 3\sigma ; m + 3\sigma]$.




## 4 . 2 . La loi normale centrée réduite

On utilise pour des raisons pratiques la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$ : c'est la loi normale de moyenne nulle (m = 0) et d'écart type égal à 1 ($\sigma = 1$).

Des tables donne les valeurs de cette loi normale centrée réduite.

Pour pouvoir l'appliquer à une variable aléatoire de moyenne m et d'écart type $\sigma$, il faut calculer $T = \frac{x - m}{\sigma}$, où x est une valeur donnée de la variable aléatoire X.

## 4 . 3 . Exemple

On a étudié les dimensions, en mm, de pièces usinées. On a obtenu une loi de probabilité de moyenne m = 20 mm et d'écart type $\sigma = 2$ mm.

- On peut calculer la probabilité de trouver une dimension inférieure à 20,90 mm en utilisant la table de la loi normale centrée réduite. On calcule $T = \frac{x - m}{\sigma}$, soit $T = \frac{20{,}90 - 20}{2}$, donc T = 0,45. On cherche la valeur 0,45 dans la table. On obtient : $P(X \leq 20{,}90) = 0{,}673\ 64$.
- On peut calculer la probabilité de trouver une dimension inférieure à 18,80 mm en utilisant la table de la loi normale centrée réduite. On calcule $T = \frac{x - m}{\sigma}$, soit $T = \frac{18{,}80 - 20}{2}$, donc $T = -0{,}60$. Comme $T < 0$, on cherche la valeur 0,60 dans la table, et la probabilité sera le complément à l'unité de la valeur lue. On obtient : $P(X \leq 18{,}80) = 1 - 0{,}725\ 75$, donc $P(X \leq 18{,}80) = 0{,}274\ 25$.

# LOI NORMALE CENTREE REDUITE $\mathcal{N}(0 ; 1)$

| T | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1 | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,2 | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4 | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,5 | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| 0,6 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,7 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78524 |
| 0,8 | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0 | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1 | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,2 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| 1,3 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7 | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8 | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9 | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| 2,0 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1 | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2 | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| 2,3 | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,4 | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,5 | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| 2,6 | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,7 | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| 2,8 | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,9 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| 3,0 | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 |
| 3,1 | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 |
| 3,2 | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 |
| 3,3 | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| 3,4 | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |
| 3,5 | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 |
| 3,6 | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 |
| 3,7 | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 |
| 3,8 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 |
| 3,9 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 |