Solution de Xavier

Revenons en arrière et ôtons à chaque joueur un même nombre de points de sorte que le nombre de parties jouées soit égal au nombre de parties gagnantes nécessaire.

En ôtant 2 points à chacun, le joueur A a 5 points et le joueur B 3 points et on a bien $5+3=8$.
Sachant que 8 points font gagner 84€, alors A, qui a 5 points, doit emporter les $\frac{5}{8}$ de la mise totale et B ayant 3 points doit avoir $\frac{3}{8}$.

Donc la mise se partagera en :

- $\frac{5}{8}$ pour A soit $\frac{5}{8}\times 84 = 52{,}50$;
- $\frac{3}{8}$ pour B soit $\frac{3}{8}\times 84 = 31{,}50$.

Solution de Yannis

Revenons en arrière, et ôtons à chaque joueur un même nombre de points de sorte que le joueur ayant le moins de points se retrouve à 0.

En ôtant 5 points à chaque joueur, A n'a plus que 2 points et B se retrouve bien à 0.

Puisque 2 est le quart de 8, on peut dire que A a déjà le quart de la victoire, donc A doit déjà prendre le quart de la mise, c'est-à-dire 21 €.

Le reste de la mise ($84 - 21 = 63$*), doit être partagé également entre les deux joueurs, ce qui fera chacun* 31,50 *euros.*

Donc la mise se partagera en :

- $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$ *pour A soit* $\frac{5}{8} \times 84 = 52{,}50$;
- $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ *pour B soit* $\frac{3}{8} \times 84 = 31{,}50$;

Luca critique la solution de Xavier

On ne doit pas faire comme Xavier pour partager la mise. Car si on ôte 2 points à A qui en a 7, cela veut dire qu'on lui retire $\frac{2}{7}$ *de ses points.*

Tandis qu'en ôtant 2 points à B, on lui retire $\frac{2}{5}$ *de ses points.*

Or $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$. *Proportionnellement, on a donc retiré plus à B qu'à A, c'est-à-dire qu'on a retiré une plus grosse partie de ses points à B qu'à A. Et cela n'est pas juste.*

Luca critique la solution de Yannis

La solution de Yannis n'est pas bonne car, en ôtant 5 points à A, on lui retire $\frac{5}{7}$ *de ses points (il en avait 7).*
Tandis qu'en ôtant 5 points à B, on lui a tout retiré.

Proportionnellement, on a donc plus retiré à B qu'à A. Et cela n'est pas juste.

Solution de Luca Pacioli (1494)

Les joueurs ont à eux deux 12 points. On peut donc dire que A a $\frac{7}{12}$ *de tous les points et que B a* $\frac{5}{12}$ *de tous les points.*

Il faut donc partager la mise suivant cette proportion :

- $\frac{7}{12}$ *pour A soit* $\frac{7}{12} \times 84 = 49$ *donc 49 €;*
- $\frac{5}{12}$ *pour B soit* $\frac{5}{12} \times 84 = 35$ *donc 35 €;*

Nicolas critique la solution de Luca

La règle de Luca n'est ni bonne, ni belle. Car, si A avait un seul point et B zéro point, et si l'on appliquait la règle de Luca, alors A devrait recevoir toute la mise et B rien du tout !

Ce ne serait pas juste que, pour un seul point (alors qu'il en faut 8 pour gagner, A doive retirer toute la mise en ne laissant rien à B.

Solution de Niccolo Tartaglia (1556)

Quelle que soit la solution qu'on propose, on trouvera toujours moyen de la discuter. Je propose quand même ma solution qui me paraît être la moins discutable.

Si la mise est de 84 €, on peut dire que chaque joueur a misé 42 €.

A qui a le plus de points, doit déjà récupérer sa mise (42 €). Mais, puisqu'il a 2 points de plus que B et que 2 points représentent le quart du jeu, A doit prendre aussi le quart de la mise de B.

Donc la mise se partagera en :

- $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{8}$ *pour A soit* $\dfrac{5}{8} \times 84 = 52{,}50$;
- $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$ *pour B soit* $\dfrac{3}{8} \times 84 = 31{,}50$;

Solution de Lorenzo Forestani (1603)

Il faut tenir compte de la chance qui peut se retourner rapidement et favoriser B d'un seul coup.

Si la partie se gagne en 8 points, les deux joueurs peuvent jouer au maximum 15 parties (dans le cas d'un score (7, 8) ou bien (8, 7).

Or A en gagné 7 et B en a gagné 5 ce qui fait 12 parties en tout. Il pourrait donc encore y avoir 3 parties et, sur ces parties là, on ne peut rien décider.

Il faut donc faire ainsi, en raisonnant sur 15 parties :

- *A a gagné 7 parties, donc il doit prendre* $\dfrac{7}{15}$ *de la mise ;*
- *B avec ses 5 parties doit prendre* $\dfrac{5}{15}$ *de la mise ;*
- *il reste* $\dfrac{3}{15}$ *de la mise qui correspondent aux 3 parties qui pourraient avoir lieu s'ils continuaient de jouer. On ne sait rien de ces parties donc il faut diviser en deux parts égales ces* $\dfrac{3}{15}$ *de la mise.*

Donc la mise se partagera en :

- $\dfrac{7}{15} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{15} = \dfrac{17}{30}$ *pour A soit* $\dfrac{17}{30} \times 84 = 47{,}60$ *donc 47,60 € ;*
- $\dfrac{5}{15} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{15} = \dfrac{13}{30}$ *pour B soit* $\dfrac{13}{30} \times 84 = 36{,}40$ *donc 36,40 € ;*

Jérôme critique la solution de Luca

Je veux d'abord dire que la solution de Luca est absurde. Il fait une erreur que même un petit enfant pourrait reconnaître. Voici laquelle :

Dans la solution de Luca, A emporte 49 € et B 35 €. Autrement dit, si on considère qu'ils ont chacun misé 42 €, cela veut dire que A a gagné 7 € sur l'argent de B.

Or la somme de 7 € représente seulement $\dfrac{1}{6}$ *de la mise de B, alors qu'il ne reste plus qu'une seule partie à gagner pour A, tandis que B doit encore en gagner 3, c'est-à-dire 3 fois plus !*

On voit que A ne gagne pas assez sur l'argent de B. Ce partage est injuste.

Mais regardons encore un autre exemple où la solution de Luca n'est pas bonne : si A avait 7 points et B 0 point, alors, d'après la solution de Luca, A devrait prendre toute la mise et B rien du tout.

Mais alors, ce serait faire comme si A avait gagné le jeu, comme si il avait 8 points, comme si la dernière partie n'avait pas d'importance. Cela ne serait pas juste.

Solution de Jérôme Cardan (1539)

Voici ma solution :

Pour trouver le bon partage, il faut seulement regarder ce qu'il manque à chaque joueur pour gagner : il manque 1 partie à A et 3 partie à B.

Il faut donc 1 hasard à A pour qu'il gagne la partie qui lui manque.

Il faut donc 1 hasard à B pour qu'il gagne la première partie nécessaire, 2 hasards pour qu'il gagne la deuxième, et 3 hasards pour gagner la troisième et enfin gagner le jeu.

Il faut donc 1 hasard pour A et 1+2+3, soit 6 hasards pour B.

Donc A doit avoir 6 fois plus de chances de gagner que B et il doit emporter 6 fois plus.

Donc la mise se partagera en :

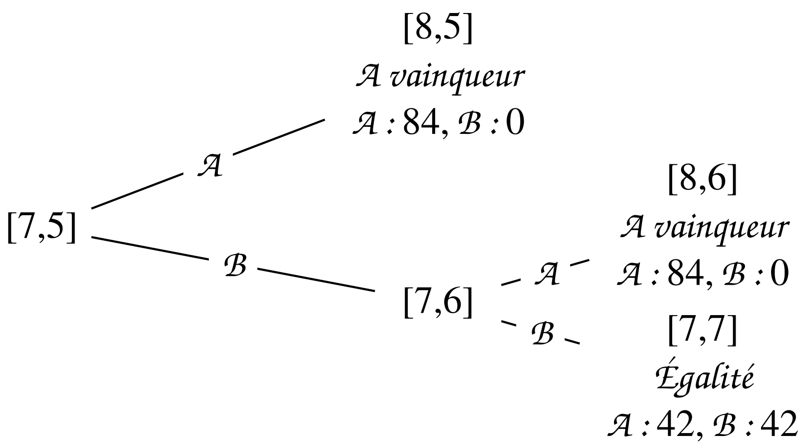
- $\frac{6}{7}$ *pour A soit* $\frac{6}{7} \times 84 = 72$ *donc 72 €;*
- $\frac{1}{7}$ *pour B soit* $\frac{1}{7} \times 84 = 12$ *donc 12 €;*

Solution de Blaise Pascal (1654)

Ce qui est important, c'est ce qu'il manque à chaque joueur pour gagner (1 point pour A et 3 points pour B), et ce qui pourrait se passer s'ils continuaient à jouer.

Par exemple, si A gagne la partie d'après, il lui manquera 0 point et il aura gagné le jeu, mais si c'est B qui gagne, il ne lui manquera plus que 2 points (et il manquera toujours 1 point à A).

Pour imaginer tout ce qui pourrait se passer dans les parties qui suivraient s'ils ne s'arrêtaient pas de jouer, je représente cela sous forme d'un « arbre » :



Ensuite, voilà comment ils se partagent la mise. A dit à B :

Imaginons qu'il me manque 1 et point et toi 2 points. À la partie suivante :

- *si c'est moi qui gagne, il me manquera 0 point et j'aurai gagné le jeu. Donc je devrai prendre toute la mise : 84 €.*
- *Mais si c'est toi qui gagne, il nous manquera à chacun 1 point. Nous devrons donc partager la mise en deux parts égales : 42 € chacun.*

Or nous avons chacun une chance sur deux de gagner cette partie. Je suis donc sûr de gagner au moins 42 €, et pour les autre 42 €, j'ai une chance sur deux de les gagner.

Donc s'il me manque 1 point et toi 2 (cas du score 7-6), je dois prendre $42+\frac{1}{2}\times 42=63$ *donc 63€. Et toi tu prendras le reste : 21 €.*

Mais en fait, il me manque 1 point et toi 3 points. Il faut donc remonter encore en arrière :

Si je gagne la prochaine partie, je gagnerai 84 €, et si je la perds, il me manquera toujours 1 point, et toi il ne t'en manquera plus que 2. Or je viens de te montrer que, dans ce cas, je dois prendre 63 € et toi 21 €. Je suis donc sûr de gagner 63 €, et j'ai une chance sur deux de gagner le reste, c'est-à-dire $84-63=21$ *donc 21 €. Donc je dois recevoir avant de jouer cette partie et si on décide de s'arrêter :* $63+\frac{1}{2}\times 21=73{,}50$ *donc 73,50 €.*

Donc la mise se partagera en :

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$ *pour A soit* $\frac{7}{8}\times 84=73{,}50$ *donc 73,50 € ;*
- $\frac{1}{8}$ *pour B soit* $\frac{1}{8}\times 84=10{,}50$ *donc 10,50 € ;*

Solution de Pierre de Fermat (1654)

Il manquera 1 point à A et 3 points à B. Donc, s'ils ne s'arrêtaient pas, ils devraient encore jouer au maximum 3 parties.

Regardons tout ce qui se peut se passer pendant ces 3 parties. Je note "A" lorsque A gagne et "B" quand c'est B qui gagne. On a alors comme possibilités tous les cas suivants :

Partie n° 1	Partie n°2	Partie n°3	Résultat final
A	A	A	A gagne
A	A	B	A gagne
A	B	A	A gagne
A	B	B	A gagne
B	A	A	A gagne
B	A	B	A gagne
B	B	A	A gagne
B	B	B	B gagne

Il y a 8 cas, et sur ces 8 cas, il y en a 7 où A gagne, et 1 seul où B gagne.

Il faut donc que A emporte une partie de la mise 7 fois plus importante que celle de B, donc $\frac{7}{8}$ *de la mise pour A et* $\frac{1}{8}$ *de la mise pour B.*

Donc la mise se partagera en :

- $\frac{7}{8}$ *pour A soit* $\frac{7}{8} \times 84 = 73{,}50$ *donc 73,50 €;*
- $\frac{1}{8}$ *pour B soit* $\frac{1}{8} \times 84 = 10{,}50$ *donc 10,50 €;*

Objection de Gilles

Pierre a tort de faire la répartition de la mise en supposant que A et B jouent encore 3 parties.

Car s'il manque 1 partie à A et 3 parties à B, il n'est pas nécessaire qu'ils jouent 3 parties pour terminer. Il peut arriver qu'ils n'en jouent que 1 ou 2.

Alors, je ne vois pas pourquoi Pierre prétend faire la répartition de la mise en suivant une règle imaginaire (à savoir qu'ils jouent en 3 parties), car la règle naturelle du jeu est qu'ils s'arrêtent de jouer dès que l'un des deux a gagné. Ce qui n'est pas le cas dans le tableau de Pierre, sauf pour les deux dernières lignes.

Ce que fait Pierre n'est peut-être pas faux, mais en tout cas, cela n'est pas démontré. Il risque donc d'y avoir une erreur dans le raisonnement.