

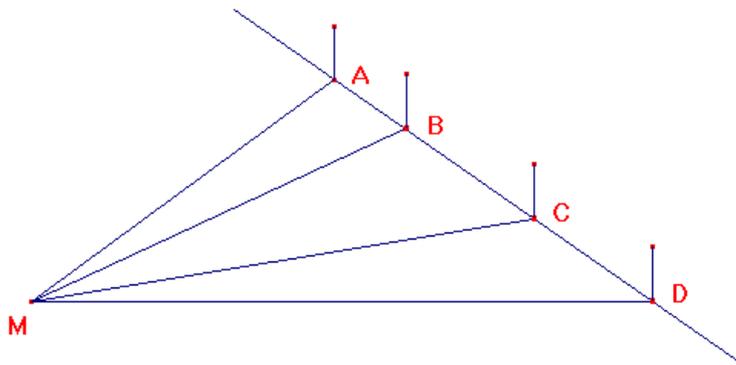
Académie de Poitiers Session 2001.
 Olympiades académiques de mathématiques.
 Classe de Première.
 Durée : 4 heures.
 L'emploi de la calculatrice est autorisé.
 Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4.
 Le dé est posé sur une table, face 1 contre cette table.
 Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.
 A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme S de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le 1 initial.

1. Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour S .
2. La somme S peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs?

Exercice 2



Montrer que l'équation

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z+2}$$

n'admet pas de solution (x, y, z) constituée d'entiers strictement positifs où $x \geq 4$.
 Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs qui sont solution.

Exercice 3

Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux, plantés en A, B, C et D dans cet ordre.
 Ces poteaux délimitent trois buts de largeurs :

$$AB = 1 \quad BC = 2 \quad CD = d$$

où d est une longueur donnée.

Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous des angles $\widehat{AMB}, \widehat{BMC}$ et \widehat{CMD} égaux.

Exercice 4

Dessinez un cube C (un dessin même approximatif en perspective suffira).
 Soient A un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est-à-dire tel que le milieu du segment $[AB]$ soit le centre du cube.
 Considérons un autre cube C' admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés.

Certaines arêtes de C rencontrent des arêtes de C' . Justifiez le fait que, en dehors de A et B , on obtient ainsi six points d'intersection entre une arête de C et une arête de C' .

Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres.

V étant le volume de C , quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes C et C' ?