BTS Groupement A
Session 2004

Exercice 1(8 points) pour les spécialités Electrotechnique, Génie optique et IRIST

1. On sait que si la variable L suit $\mathcal{N}(m,\sigma)$ alors la variable $T=\dfrac{L-m}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(1,0)$.
   On prélève une pièce au hasard dans la production.
   La probabilité qu'elle soit conforme est donc :
   $$P(79.8<L<80.2)=P(-2,11<T<2,11)=2P(T<2,11)-1=0,965$$
2. On admet que si on prélève, au hasard, une pièce dans la production, la probabilité que cette pièce ne soit pas conforme, est $p=0,035$.
   (a) Extraire un lot de 100 pièces revient à répéter 100 fois le prélèvement d'une pièce. Cette pièce prélevée est conforme avec une probabilité $p=0,035$ ou non conforme avec une probabilité $q=1-p=0,965$. L'assimilation du tirage à un tirage avec remise assure l'indépendance de ces épreuves.
   En conclusion, la variable X suit $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n=100$ et $p=0,035$.
   (b) La probabilité $P(A)$ est :
   $$P(A)=P(X=2)=C_{100}^{2}0,035^{2}0,965^{98}=0,1847$$
   La probabilité $P(B)$ est :
   $$P(B)=P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0,869$$
   (c) La probabilité que le client refuse le lot est :
   $$P(X>4)=1-P(X\leq 4)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=0,273$$
   (d) Si on choisit $n=7$ alors :
   $$P(X>7)=1-P(X\leq 7)=0,0217<0.03$$
   Mais si on choisit $n=8$ alors :
   $$P(X>8)=1-P(X\leq 8)=0,0592\geq 0.03$$
   donc $n=7$.
3. La variable L_1 suit $\mathcal{N}(80,\sigma')$ donc la variable $T=\dfrac{L_1-80}{\sigma'}$ suit $\mathcal{N}(1,0)$. La probabilité cherchée est donc :
   $$P(79,8<L_1<80,2)=P\left(\frac{0,2}{\sigma'}<T<\frac{0,2}{\sigma'}\right)=2P\left(T<\frac{0,2}{\sigma'}\right)-1=0,99$$
   Donc :
   $$P\left(T<\frac{0,2}{\sigma'}\right)=0,995$$
   d'où :
   $$\frac{0,2}{\sigma'}=2.575 \text{ et } \sigma'=0,0777$$

Exercice 1 (8 points) pour les spécialités
Contrôle industriel et régulation automatique, Electronique, Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Partie 1

1. (a) On sait que $x(n)-2x(n-1)=e(n)$ pour tout n entier relatif ; donc avec $n=0$, on obtient :

$$x(0)-2x(-1)=e(0)$$

Puisque le signal x est causal on a $x(-1)=0$; donc :

$$x(0)=e(0)=1$$

(b) Avec $n=1$, puis $n=2$, puis $n=3$ dans l'équation (E) on obtient :

$$x(1)=1+2x(0)=3\ ;\ x(2)=1+2x(1)=7\ ;\ x(3)=1+2x(2)=15$$

2. (a) Pour tout entier naturel n, on a $y(n)=x(n)+1$ donc :

$$x(n)=y(n)-1 \text{ si } n\geq 0 \text{ et } x(n-1)=y(n-1)-1 \text{ si } n\geq 1$$

Remplaçons dans (E) :

$$y(n)-1-2\left[y(n-1)-1\right]=1\quad (E)$$

Après simplification, on obtient $y(n)-2y(n-1)=0$ si $n\geq 1$. Donc :

$$y(n)=2y(n-1) \text{ si } n\geq 1$$

En conclusion, n est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme
$y(0)=x(0)+1=2$. L'expression de $y(n)$ en fonction de l'entier naturel n est donc :

$$y(n)=y(0)q^n=2\ 2^n=2^{n+1} \text{ si } n\geq 0$$

(b) L'expression de $x(n)$ est donc :

$$x(n)=y(n)-1=2^{n+1}-1 \text{ si } n\geq 0$$

On vérifie :

$$x(0)=2^1-1=1\ ;\ x(1)=2^2-1=3\ ;\ x(2)=2^3-1=7\ ;\ x(3)=2^4-1=15$$

Partie 2

1. (a) On se place dans le cas où $n\geq 1$; l'équation (E) est :

$$x(n)-2x(n-1)=e(n)$$

La transformation en Z de cette équation donne :

$$(Zx)(z)-2z^{-1}(Zx)(z)=\frac{z}{z-1}$$

Donc, en factorisant :

$$(Zx)(z)\left[1-\frac{2}{z}\right]=\frac{z}{z-1}$$

On obtient finalement, si $z\neq 0$, $z\neq 1$ et $z\neq 2$:

$$(Zx)(z)=\frac{z}{z-1}\times\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$$

(b) Donc, si $z \neq 0$, $z \neq 1$ et $z \neq 2$ on peut écrire :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

où A et B sont deux réels à déterminer ; on peut écrire :

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{z(A+B)-2A-B}{z-1)(z-2)}$$

On identifie les deux expressions :

$$z = z(A+B) - 2A - B$$

Donc $A+B=1$ et $-2A-B=0$; on en tire $A=-1$ et $B=2$; donc :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

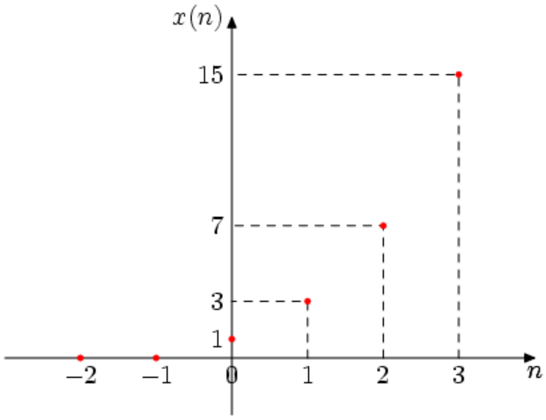
(c) On en déduit donc :

$$(Zx)(z) = (-1)\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z-2}$$

Par lecture inverse du dictionnaire d'images, on obtient :

$$x(n) = (-1) \times 1 + 2 \times 2^n = -1 + 2^{n+1}$$

2. Représentation graphique du signal $n \mapsto x(n)$:



Exercice 2 (12 points) pour toutes les spécialités

Partie A

1. On sait que $s(0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$; on en déduit donc :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t)\right) = p^2 S(p) \text{ et } \mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\right) = pS(p)$$

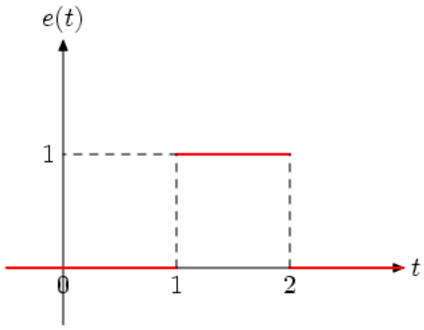
Donc l'équation devient :

$$(LCp^2 + RCp + 1)S(p) = E(p) \text{ donc } S(p) = \frac{E(p)}{LCp^2 + RCp + 1}$$

et :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

2. (a) La courbe représentative de la fonction e est :



(b) L'expression de $E(p)$ est :

$$E(p)=\mathcal{L}(e(t))=\mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-2)\right)=\frac{1}{p}\left[\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{-2p}\right]$$

3. (a) On pose $L=2$, $R=1000$ et $C=2.10^{-6}$; donc $H(p)$ est égal à :

$$H(p)=\frac{1}{4.10^{-6}p^2+2.10^{-3}p+1}=\frac{0,25.10^6}{p^2+500p+0,25.10^6}=\frac{500^2}{p^2+500p+62500+187500}$$

On a bien :

$$H(p)=\frac{500^2}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}$$

(b) On admet que :

$$\frac{1}{p}H(p)=\frac{1}{p}-\frac{p+250}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}-\frac{250}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}$$

Déterminons les originaux des trois termes ci-dessus :

Premier terme : $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=\mathcal{U}(t)$

Deuxième terme : $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}\right]=\cos\left(250\sqrt{3}t\right)\mathcal{U}(t)$

donc $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+250}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}\right]=\cos\left(250\sqrt{3}t\right)\mathrm{e}^{-250t}\,\mathcal{U}(t)$

Troisième terme : $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{250\sqrt{3}}{p^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}\right]=\sin\left(250\sqrt{3}t\right)\mathcal{U}(t)$

donc $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{250\sqrt{3}}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(250\sqrt{3}t\right)\mathrm{e}^{-250t}\,\mathcal{U}(t)$

Puis on ajoute les trois originaux :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}H(p)\right]=h_1(t)=\left[1-\cos\left(250\sqrt{3}t\right)\mathrm{e}^{-250t}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(250\sqrt{3}t\right)\mathrm{e}^{-250t}\right]\mathcal{U}(t)$$

Exprimons $s(t)$ à l'aide de $h_1(t)$:

$$\begin{aligned}s(t)&=\mathcal{L}^{-1}[S(p)]=\mathcal{L}^{-1}[H(p)E(p)]\\&=\mathcal{L}^{-1}\left[H(p)\frac{1}{p}\left(\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{-2p}\right)E(p)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}H(p)\mathrm{e}^{-p}-\frac{1}{p}H(p)\mathrm{e}^{-2p}\right]\\&=h_1(t-1)-h_1(t-2)\end{aligned}$$

En conclusion, l'expression de $s(t)$ est :

$$\begin{aligned}s(t)\;=\;&\left[1-\cos\left(250\sqrt{3}(t-1)\right)\mathrm{e}^{-250(t-1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(250\sqrt{3}(t-1)\right)\mathrm{e}^{-250(t-1)}\right]\mathcal{U}(t-1)\ldots\\&\ldots-\left[1-\cos\left(250\sqrt{3}(t-2)\right)\mathrm{e}^{-250(t-2)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(250\sqrt{3}(t-2)\right)\mathrm{e}^{-250(t-2)}\right]\mathcal{U}(t-2)\end{aligned}$$

En simplifiant :

$$\begin{aligned} s(t) &= -\left[\cos\left(250\sqrt{3}(t-1)\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin\left(250\sqrt{3}(t-1)\right)\right]\mathrm{e}^{-250(t-1)}\,\mathcal{U}(t-1)\ldots \\ &\ldots+\left[\cos\left(250\sqrt{3}(t-2)\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin\left(250\sqrt{3}(t-2)\right)\right]\mathrm{e}^{-250(t-2)}\,\mathcal{U}(t-2) \end{aligned}$$

(c) Expression de $s(t)$ sur l'intervalle $]-\infty,1[$:

$$\mathcal{U}(t-1)=0 \text{ et } \mathcal{U}(t-2)=0 \text{ donc } s(t)=0$$

Expression de $s(t)$ sur l'intervalle $[1,2[$:

$$\mathcal{U}(t-1)=1 \text{ et } \mathcal{U}(t-2)=0$$

$$\text{donc } s(t)=-\left[\cos\left(250\sqrt{3}(t-1)\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin\left(250\sqrt{3}(t-1)\right)\right]\mathrm{e}^{-250(t-1)}$$

Expression de $s(t)$ sur l'intervalle $[2,+\infty[$:

$$\mathcal{U}(t-1)=1 \text{ et } \mathcal{U}(t-2)=1$$

$$\begin{aligned} \text{donc } s(t) &= -\left[\cos\left(250\sqrt{3}(t-1)\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin\left(250\sqrt{3}(t-1)\right)\right]\mathrm{e}^{-250(t-1)}\ldots \\ &\ldots+\left[\cos\left(250\sqrt{3}(t-2)\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin\left(250\sqrt{3}(t-2)\right)\right]\mathrm{e}^{-250(t-2)} \end{aligned}$$

Partie B

On rappelle que $H(p)=\dfrac{500^2}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}$.

1.

$$\begin{aligned} \mid H(j\omega)\mid &= \left|\ \frac{500^2}{(j\omega+250)^2+(250\sqrt{3})^2}\ \right| \\ &= \frac{500^2}{\mid -\omega^2+250^2+500j\omega+3.250^2\ \mid} \\ &= \frac{500^2}{\mid 4.250^2-\omega^2+500j\omega\ \mid} \\ &= \frac{500^2}{\sqrt{(500^2-\omega^2)^2+(500\omega)^2}} \\ &= \frac{500^2}{\sqrt{\omega^4-2.500^2\omega^2+500^4+^2+500^2\omega^2}} \\ &= \frac{500^2}{\sqrt{\omega^4-500^2\omega^2+500^4}} \end{aligned}$$

On considère la fonction r définie pour tout réel $\omega>0$ par :

$$r(\omega)=\mid H(\mathrm{j}\omega)\mid$$

2. On sait que $f(\omega)=\omega^4-500^2\omega^2+500^4$; calculons $f'(\omega)$:

$$f'(\omega)=4\omega^3-2\times500^2\omega=4\omega(\omega^2-125000)=4\omega\left(\omega-250\sqrt{2}\right)\left(\omega+250\sqrt{2}\right)$$

3. On sait que $r(\omega)=\dfrac{500^2}{\sqrt{f(\omega)}}$; donc :

$$r'(\omega)=-\frac{500^2 f'(\omega)}{2f(\omega)\sqrt{f(\omega)}}$$

donc $r'(\omega)$ est bien du signe de $-f'(\omega)$ car $f(\omega)>0$ et $\sqrt{f(\omega)}>0$.

4. Les variations de r sont :

ω	0		ω_0		$+\infty$
$r'(\omega)$		$+$	0	$-$	
$r(\omega)$		$\nearrow$	$r(\omega_0)$	$\searrow$	

avec $\omega_0 = 250\sqrt{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
r(\omega_0) &= \frac{500^2}{\sqrt{(250\sqrt{2})^4 - 500^2(250\sqrt{2})^2 + 500^4}} \\
&= \frac{500^2}{\sqrt{4.250^4 - 4.250^2.250^2.2 + 500^4}} \\
&= \frac{500^2}{\sqrt{4.250^4 - 8.250^4 + 16.250^4}} \\
&= \frac{500^2}{\sqrt{12.250^4}} = \frac{500^2}{\sqrt{12}\,250^2} = \frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{4\sqrt{12}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$