Les exercices d'arithmétique posés en série C il a 25 ans

Autrefois l'arithmétique faisait partie du programme de la classe de terminale C.
On trouve donc dans les annales de l'époque des exercices d'arithmétique.
Voici la liste de ceux qui ont été proposés en juin 1974, il y a donc 25 ans !

Les exercices ou problèmes dont seulement une question portait sur l'arithmétique n'ont pas été retenus.
On constate que certains de ces exercices ne correspondent pas exactement au programme actuel.
De plus ces exercices ont été écrits à une époque où les élèves ne disposaient pas de moyens de calcul ; il est maintenant possible d'aborder les situations considérées de façon un peu expérimentale avant de passer aux démonstrations des propriétés étudiées.

1. **Aix-Marseille**
   Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0) tel que :
   $$37x_0 + 23y_0 = 1$$
   En utilisant ce couple particulier déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de :
   $$37x + 23y = 1$$

2. **Bordeaux**

   1 Déterminer le plus grand diviseur commun d des nombres :
   $$a = 4420 \qquad b = 2772$$

   2 Déterminer les restes dans la division par 5 des entiers naturels : 12^d, 12^a, 12^b.

3. **Clermont-Ferrand**
   Trouver l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient :
   $$5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n \equiv 0 \quad \text{modulo } 13$$
   (*On pourra remarquer que* : $x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x+1)(x^2+1)$)

4. **Dijon**
   Soit n et p deux entiers naturels non nuls, x un élément de $\mathbb{Z} - \{0, 1\}$ donnés, $\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.

   1 Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

   P_1 : p divise $x^2 - x$

   P_2 : pour tout entier naturel non nul n, p divise $x^n - x$.

   2 Déterminer les entiers relatifs x tels que, pour tout entier naturel non nul n, 6 divise $x^n - x$.

5. **Lille**

   1 On donne deux entiers a et b et on considère l'équation : $ax - by = 1$
   où l'inconnue est le couple (x, y) d'entiers relatifs.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b, pour que l'ensemble des solutions de cette équation ne soit pas vide.

   2 Vérifier que le couple $(7, 24)$ est solution de l'équation :

   $$(E) \qquad 55x - 16y = 1$$

   En déduire l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui sont solutions de (E).

6. **Limoges**

   1 a désigne un entier naturel non nul donné.
   Démontrer que le nombre $A = a(a^2 - 1)$ est divisible par 6.

   2 Plus généralement, démontrer que $A_n = a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6.
   (n désigne un entier naturel quelconque).
   Application : Démontrer que les sommes :

   $$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \qquad S_n = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \cdots + a_k^{2n+1}$$

   dans lesquelles a_1, a_2, $\cdots a_k$ désignent des entiers naturels non nuls donnés, ont le même reste de division par 6.

7. **Lyon**
   Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et D la droite de P d'équation : $3x + 4y - 1 = 0$

   1 Déterminer l'ensemble H de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

   2 Quel est l'ensemble H' des points de H dont le carré de la distance à O est un multiple de 13 ?

8. **Nantes**
   Etudier les restes des divisions par 9 des puissances successives de 2.
   Démontrer que le nombre $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1$ est toujours divisible par 9, quel que soit l'entier naturel n.

9. **Rennes**
   Soit $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'entiers modulo 10.

   1 Résoudre dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'équation : $\dot{2}x = \dot{0}$

   2 Résoudre dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ le système :

   $$\begin{cases} \dot{5}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{5} \end{cases}$$

10. **Rouen**
Démontrer que pout tout entier naturel n : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

11. **Toulouse**
On considère l'application f de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels vers l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ définie par : $f(n) = \overline{5^n}$
($\overline{5^n}$ désignant la classe d'équivalence de 5^n modulo 7)

   1 Déterminer $f(n)$ pour n appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   2 Montrer que f est périodique et a pour période 6.

   3 Déterminer $f(n)$ suivant les valeurs de n.

   4 En déduire, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 du nombre 12192^n.

12. **session de remplacement**

Parmi les épreuves de la session de remplacement de 1974 on trouvait aussi les 4 exercices suivants :

   (a) **exercice 1**
   On décide de former des nombres en base dix en écrivant de gauche à droite quatre chiffres consécutifs dans l'ordre croissant, puis en permutant les deux premiers chiffres de gauche.
      i. Montrer que tous les naturels ainsi obtenus sont des multiples de 11.
      ii. L'un d'eux N est un carré parfait ; déterminer N.

   (b) **exercice 2**
   Déterminer tous les entiers naturels n tels que $3 + 10^n$soit divisible par 7.

   (c) **exercice 3**
   Etudier les restes des quatre nombres $2, 2^2, 2^3, 2^4$ dans la division par 5 et démontrer que, quel que soit l'entier strictement positif n, le nombre
   $17^{4n+2} + 32^{4n-1} + 3$ est divisible par 5.

   (d) **exercice 4**
   Quel est, suivant la valeur de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne du nombre 5^n par 13 ?
   En déduire que, quel que soit l'entier naturel n non nul, on a :

$$18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \times 96^{4n+2} \equiv 0 \qquad (13)$$