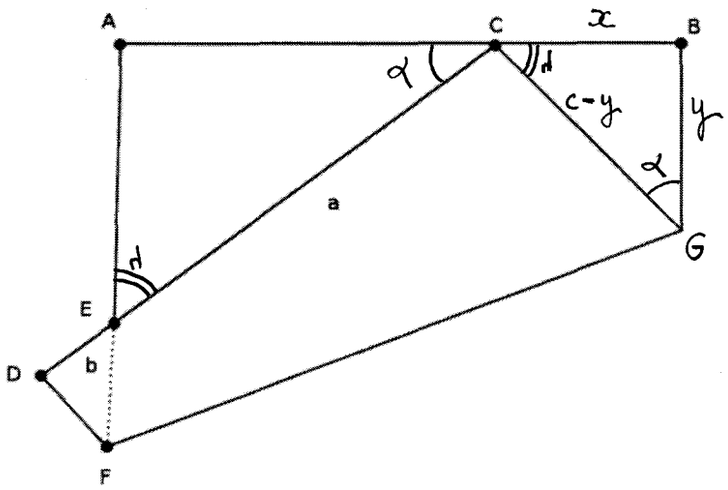
On considère un carré $ABCD$, qu'on plie de telle sorte que le point C se trouve sur le segment $[AB]$, comme le montre la figure ci-dessous. Peut-on évaluer la valeur minimale de $\frac{a}{b}$, avec $CE = a$ et $ED = b$?



Solution

On appelle c la longueur AB du côté du carré, x la longueur BC, y la longueur BG, et par conséquent $c - y$ est la longueur CG.

On va calculer la valeur du quotient $\frac{a}{b}$ en fonction de x.

On suppose $0 \prec x \prec c$, donc $(c - x)$ et y sont différents de 0.

Les triangles AEC et BCG sont semblables en raison de leurs angles égaux. On a donc :

$\frac{BG}{AC} = \frac{CG}{EC}$, soit $\frac{y}{c-x} = \frac{c-y}{a}$. On déduit que $a = \frac{(c-x)(c-y)}{y}$ (1)

La relation de Pythagore appliquée au triangle rectangle BCG donne : $y^2 = (c-y)^2 - x^2$. En développant et réduisant on obtient : $y = \frac{(c^2 - x^2)}{2c} = \frac{(c+x)(c-x)}{2c}$.

La relation (1) devient $a = \frac{(c-x)(c-y)\times 2c}{(c+x)(c-x)} = \frac{2c(c-y)}{c+x}$. (2)

On calcule $c - y = c - \frac{c^2 - x^2}{2c} = \frac{c^2 + x^2}{2c}$

On déduit en remplaçant dans (2) $(c-y)$ par $\frac{(c^2+x^2)}{2c}$ que $a = \frac{2c(c^2+x^2)}{2c(c+x)} = \boxed{\frac{c^2+x^2}{c+x} = a}$

On calcule $b = c - a$; $b = c - \frac{c^2+x^2}{c+x} = \boxed{\frac{x(c-x)}{c+x} = b}$

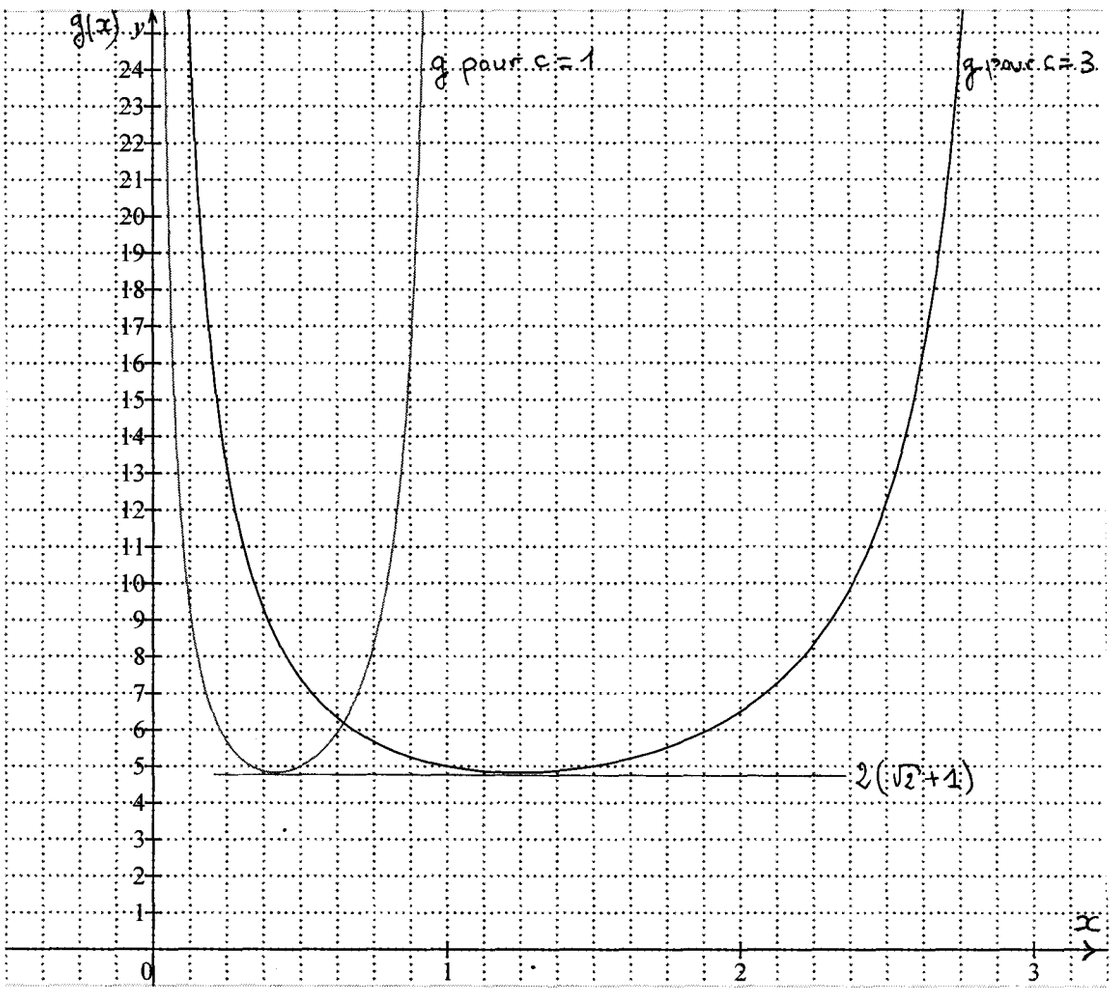
Finalement $\frac{a}{b}=\frac{c^2+x^2}{c+x}\times\frac{c+x}{x(c-x)}$; $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c^2+x^2}{x(c-x)}}$

Appelons g la fonction définie sur]0 ; c[par $g(x)=\frac{c^2+x^2}{x(c-x)}$

La dérivée $g'(x)=\frac{c(x^2+2xc-c^2)}{[x(c-x)]^2}$. La valeur positive de x qui annule g' est égale à $c(\sqrt{2}-1)$.

Le calcul de $g\left[c(\sqrt{2}-1)\right]=2\left(\sqrt{2}+1\right)$ ne dépend pas de c , ce qui est naturel puisque $g(x)$ est un rapport de longueurs proportionnelles.

$2\left(\sqrt{2}+1\right)$ est le minimum de la fonction g pour l'intervalle $]0;c[$ car g est décroissante de 0 à $c\left(\sqrt{2}-1\right)$ et croissante de $c\left(\sqrt{2}-1\right)$ à c .

Ainsi la valeur minimale de $\frac{a}{b}$ quand le point C décrit $[AB]$ est $2(\sqrt{2}+1)$, le point C se trouvant à $\left(\sqrt{2}-1\right)\times AB$ du point B . Pour ce minimum $a=2c\left(\sqrt{2}-1\right)$ et $b=c\left(3-2\sqrt{2}\right)$

Remarquons que dans ce cas , on a $y=BG=c\left(\sqrt{2}-1\right)=x$, ainsi les triangles BCG et AEC sont isocèles rectangles .