Énoncé

On remarque que

$$\begin{aligned}6^2 - 5^2 &= 11\\ 56^2 - 45^2 &= 1111\\ 556^2 - 445^2 &= 111111\\ 5556^2 - 4445^2 &= 11111111\end{aligned}$$

Peut-on généraliser ?

Solution

Appelons x_p le nombre entier s'écrivant avec p fois le chiffre 1.
Nous devons alors calculer

$$(5x_p + 1)^2 - (4x_p + 1)^2 = (9x_p + 2)x_p$$

Or

$$x_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$$

c'est-à-dire à l'aide de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$x_p = \frac{10^p - 1}{9}$$

On en tire alors

$$9x_p + 2 = 10^p + 1$$

d'où

$$\begin{aligned}(9x_p + 2)x_p &= \frac{(10^p + 1)(10^p - 1)}{9}\\ &= \frac{10^{2p} - 1}{9}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(5x_p + 1)^2 - (4x_p + 1)^2 = x_{2p}$$

avec x_{2p} qui s'écrit avec $2p$ fois le chiffre 1.
Nous pouvons alors généraliser le résultat énoncé :

$$\boxed{\Big(\underbrace{55\ldots5}_{p-1\text{ fois}}6\Big)^2 - \Big(\underbrace{44\ldots4}_{p-1\text{ fois}}5\Big)^2 = \underbrace{11\ldots1}_{2p\text{ fois}}}$$