Énoncé

Pour reproduire ce beau sangaku inspiré des travaux de l'IREM de Poitiers, il suffit de connaître le rayon du petit cercle.
Calculer ce rayon sachant que l'équation de la parabole est $y = x^2$ dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

Solution logicielle

Soit M un point mobile de coordonnées $\left(t\,;t^2\right)$ sur la parabole.
Appelons A, le centre du grand cercle tangent en M à la parabole et O l'origine du repère orthonormé.
En désignant par r le rayon du petit cercle, on a $AM = 4r$ et $OA = 6r$.
Par conséquent, r est solution de l'équation

$$\boxed{3AM = 2OA}$$

et

$$\boxed{r = \frac{1}{6}OA}$$

Xcas va être utilisé pour résoudre ce problème.
On ouvre une fenêtre de géométrie en tapant en même temps sur Alt et G.
Entrons successivement les données suivantes de façon à placer un point M mobile sur la parabole,

```
O:=point(0,0)
I:=point(1,0)
J:=(0,1)
supposons(t:=[1,0,6])
para:=plot(x^2,x=-4..4,xstep=0.1,display=magenta+rempli)
M:=point(t,t^2)
d:=tangent(para,point(M))
n:=perpendiculaire(point(M),d)
A:=inter_unique(n,droite(O,J),n)
```

point((i)*t^2 + (i)/2)

```
l_1:=t->longueur(A,M)
l_2:=t>longueur(O,A)
sol:=resoudre(3*l_1(t)=2*l_2(t),t)
```

list[-sqrt((sqrt(5) * 6 + 10)/16),sqrt((sqrt(5) * 6 + 10)/16)]

On fait apparaître l'expression de la longueur $AM(t) = l_1(t)$:

```
l_1(t)
```

sqrt($(-t)^2$ + 1/2^2)

et celle de la longueur $OA(t) = l_2(t)$:

```
l_2(t)
```

t^2 + 1/2

Déterminons alors le rayon de ce cercle :

```
L_2:=t->t^2+1/2:;
r:=1/6*L_2(sol[1]):;
normal(r)
```

(sqrt(5) + 3)/16

Vérifions si l'égalité $3AM = 2OA$ est vraie :

```
L_1:=t->sqrt(t^2+1/2^2):;
normal(3*L_1(sol[1]))==normal(2*L_2(sol[1]))
```

vrai

$$\boxed{\text{Le rayon du petit cercle est } r = \frac{1}{16}\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

Il est aussi possible de vérifier avec Xcas que les différents cercles et parabole sont bien tangents comme voulus.
Tracés des différents cercles :

```
c_1:=cercle(i*r,r)
c_3:=cercle(3*i*r,r)
c_5:=cercle(5*i*r,r)
c_7:=cercle(7*i*r,r)
c_9:=cercle(9*i*r,r)
c_6:=cercle(6*i*r,4*r)
```

Intersection entre les différents cercles ou parabole :

```
B:=inter(c_1,c_3)
C:=inter(c_3,c_5)
D:=inter(c_5,c_7)
E:=inter(c_7,c_9)
F:=inter(c1,c_6)
G:=inter(c_9,c_6)
H:=inter(c_6,para)
K:=inter(c_1,para)
```

Solution algébrique

La parabole d'équation $y = x^2$ est paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

En tout point $M(t)$ de la parabole, la tangente à la parabole est dirigée par le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ de coordonnées $(1\,;2t)$.
Un point $N(x,y)$ appartient à la normale à la parabole en $M(t)$ si et seulement si $\overrightarrow{M(t)N} \perp \overrightarrow{V(t)}$, c'est-à-dire à l'aide du produit scalaire, une équation cartésienne de cette normale est

$$\boxed{x - t + 2t(y - t^2) = 0}$$

Cette normale est sécante avec l'axe des ordonnées au point

$$\boxed{A(t)\left(0\,;t^2+\frac{1}{2}\right) \quad \text{d'où} \quad OA(t) = t^2 + \frac{1}{2}}$$

Remarque : Pour obtenir ce point A, on exclut le cas $t = 0$ qui nous place à l'origine du repère.

On a donc $\overrightarrow{A(t)M(t)}\left(t\,;-\frac{1}{2}\right)$ d'où $\boxed{A(t)M(t) = \sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}$.
Il reste alors à résoudre l'équation

$$2OA(t) = 3A(t)M(t)$$

ce qui équivaut à

$$4OA(t)^2 = 9A(t)M(t)^2$$

c'est-à-dire

$$\boxed{16t^4 - 20t^2 - 5 = 0}$$

équation bicarrée qui admet deux racines en t^2 égales à $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{8}$.
Seule

$$t_1^2 = \frac{5+3\sqrt{5}}{8}$$

convient, l'autre étant négative.
On obtient à l'aide de $OA = t_1^2 + \frac{1}{2}$,

$$OA = \frac{3(3+\sqrt{5})}{8}$$

Le rayon du petit cercle est donné par $r = \frac{1}{6}OA$, d'où

$$\boxed{\text{Le rayon du petit cercle est alors } r = \frac{1}{16}\left(3+\sqrt{5}\right)}$$