Devinez les valeurs ! - publié le 01/04/2013

Sujet n°13 (facile)

• Enoncé

Soit $f:\Re \longrightarrow \Re$ telle que, pour tout réel x :

$$f(f(x)) = x^2 - 2x + 2$$

Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

Réponse: $f(0)$ ne peut prendre que deux valeurs: **1 ou 2.**

En effet si on recompose par f la relation donnée on obtient pour tout x
$f(f(f(x))) = f(x^2 - 2x + 2)$ mais aussi $f(f(f(x))) = (f(x))^2 - 2f(x) + 2$

Donc pour $x = 0$ on obtient l'égalité $f(2) = f(0)^2 - 2f(0) + 2$
$f(0)$ est donc solution d'une équation du second degré...

En outre pour $x = 2$ on obtient l'égalité $f(2) = f(2)^2 - 2f(2) + 2$
donc $f(2)$ est solution de l'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2
donc $f(2) = 1$ ou $f(2) = 2$

Chacun de ces deux cas nous conduit à une nouvelle équation vérifiée cette fois par $f(0)$:
$1 = X^2 - 2X + 2$ il y a une seule solution : 1
$2 = X^2 - 2X + 2$ il y a deux solutions : 0 et 2
On peut néamoins exclure la valeur 0, puique si $f(0) = 0$ alors $f(f(0)) = f(0) = 0$ mais on sait depuis le début que $f(f(0)) = 2$.

Conclusion :
On a prouvé que **si** le nombre f(0) existe **alors** il ne peut valoir que **1 ou 2**.

Remarque:
Pour prouver l'existence, l'idéal serait de trouver une fonction qui conviennent.
$f(x) = |x-1|^{\sqrt{2}} + 1$ convient puisque $f(0) = 2$ et que $f(f(x)) = x^2 - 2x + 2$ pour tout réel x

Par contre, je ne trouve pas de fonction qui convienne pour que $f(0) = 1$.

Peut-être que la valeur 1 n'est pas possible, après tout....
En tout cas, pas si facile cette énigme du premier avril!