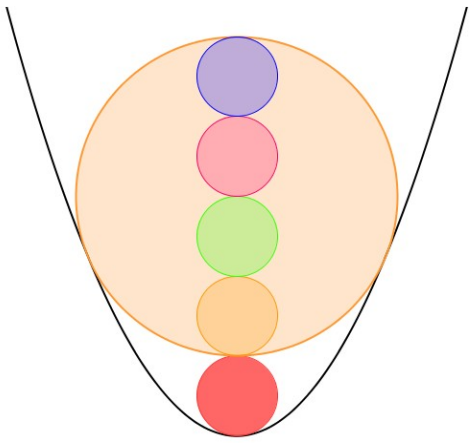
Problème Quinzaine 4

Enoncé : Pour reproduire ce beau sangaku inspiré des travaux de l'IREM de Poitiers (2nde et 1ereS), il suffit de connaitre le rayon du petit cercle.

Calculer ce rayon sachant que l'équation de la parabole est $y=x^2$ dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

Précisions:
Ce qu'on voit sur le sangaku fait office de données:
Les cercles sont bien tangents entre eux.
(et leurs centres alignés sur l'axe de la parabole)
Le petit rouge est tangent à la parabole en seul point .
Le grand en deux points.



Solution pb quinzaine 4

Il nous faut étudier les relations entre les rayons r et R des cercles.

- Le petit cercle (rouge) a pour équation $x^2+(y-r)^2=r^2$ (Quelle condition sur r?)

Il est tangent à la parabole ssi il la coupe en un seul point c'est à dire si le système $\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-r)^2=r^2 \end{cases}$ a une seule solution $(x_0;y_0)$.

Or $y_0+(y_0-r)^2=r^2$ revient à $y_0(y_0+1-2r)=0$ donc l'équation en y_0 a une seule solution positive (en fait nulle) lorsque $1-2r\geqslant 0$

On a donc nécessairement $r\leqslant\frac{1}{2}$ (au delà le petit cercle n'est plus tangent!)

- Le grand cercle a pour équation $x^2+(y-(2r+R))^2=R^2$ (Quelle condition sur R?)

Dire qu'il est tangent à la parabole revient à dire que le système $\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-(2r+R))^2=r^2 \end{cases}$ n'a que deux solutions $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ (avec $x_2=-x_1$ et $y_1=y_2$ >0)

L'équation en y devient après simplification $y^2+y(1-(2r+R))+4r^2+4rR=0$
Le discriminant $\Delta=4R^2-4R+1-8r$ s'annule seulement pour $R=0{,}5+\sqrt{2r}$
(l'autre valeur $R'=0{,}5-\sqrt{2r}$ étant absurde).
C'est la condition cherchée pour que le système n'ait que les deux solutions annoncées.

On connait maintenant la relation entre les rayons r et R pour obtenir le début de la figure :

$$R=0{,}5+\sqrt{2r}$$

-Enfin, il faut que $R=4r$ (pour que les 4 petits cercles logent dans le grand) ce qui donne:

$$0{,}5+\sqrt{(2r)}=4r$$

En se ramenant à une équation du second degré:

$$(4r-0{,}5)^2=2r$$

on obtient finalement:

$$r=\frac{3+\sqrt{5}}{16}$$ soit environ **0,327 cm**

(la deuxième solution 0,0475...étant absurde)