



• **Énoncé**

Un grenouille capricieuse fait des sauts de longueurs variables mesurés en nombres entiers. Elle part d'un point O et elle revient à ce point avant d'effectuer un deuxième saut et ainsi de suite. En tout elle fait 9 allers-retours en totalisant 180 m. Montrer qu'il existe trois trajets (aller simple) dont la somme dépasse 30 m.

Solution

Notons x_i , (i allant de 1 à 9) les longueurs des 9 trajets simples. Alors $\sum_1^9 x_i = 90$.

On souhaite prouver qu'il obligatoirement existe trois chiffres distincts i, j, k tels que $x_i + x_j + x_k \geq 30$

Supposons un instant le contraire :

C'est à dire quelques soient i, j, k distincts on ait $x_i + x_j + x_k < 30$

alors on aurait automatiquement que $\sum_1^3 x_i < 30$ et $\sum_4^6 x_i < 30$ et $\sum_7^9 x_i < 30$

et donc en ajoutant: $\sum_1^9 x_i < 90$: ce qui contradictoire avec $\sum_1^9 x_i = 90$.

Il existe donc nécessairement trois trajets dont la somme dépasse 30m.

Remarque

Notons que le dépassement n'est pas strict, puisque si tous les trajets valent 10m, aucune somme de trois trajets ne dépassera strictement 30m....