FEUILLE D'EXERCICES N°4

On se propose d'utiliser le tableur Excel pour trouver des conditions qui permettent d'approximer la loi binomiale par la loi de Poisson ou par la loi Normale. Commencer par lancer le tableur.

1 Calcul de la loi Binomiale.

Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors on a :

$$p(X=k) = \text{LOI.BINOMIALE}(k;n;p;\text{FAUX})\ p(X \leqslant k) = \text{LOI.BINOMIALE}(k;n;p;\text{VRAI})$$

Exercice I : La variable aléatoire X suit $\mathcal{B}(15,0.22)$. Déterminer $p(X=5)$ et $p(X \leqslant 5)$.

2 Calcul de la loi de Poisson.

Si la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, alors on a :

$$p(X=k) = \text{LOI.POISSON}(k;\lambda;\text{FAUX})\ p(X \leqslant k) = \text{LOI.POISSON}(k;\lambda;\text{VRAI})$$

Exercice II : La variable aléatoire X suit $\mathcal{P}(3)$. Déterminer $p(X=4)$ et $p(X \leqslant 4)$.

3 Calcul de la loi Normale.

Si la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m et σ, alors on a :

$$p(X=k) = \text{LOI.NORMALE}(k;m;\sigma;\text{FAUX})\ p(X \leqslant k) = \text{LOI.NORMALE}(k;m;\sigma;\text{VRAI})$$

Exercice III : La variable aléatoire X suit $\mathcal{N}(12,3)$. Déterminer $p(X=8)$ et $p(X \leqslant 8)$.

Exercice IV : La variable aléatoire X suit $\mathcal{N}(4,1.5)$. Déterminer $p(2 \leqslant X \leqslant 4)$

Exercice V : Retrouver avec le tableur les valeurs de la table de la loi normale centrée réduite : $\Pi(1,51) = 0,9345$ et $\Pi(0,18) = 0,5714$

4 Comparaison des lois

Charger le classeur 3_lois.xls, dont l'auteur est Hubert Bayet. On activera les macros. La première feuille de ce classeur permet de comparer les valeurs prises avec la loi binomiale de paramètres n et p, la loi de Poisson de paramètre np, et la loi normale de paramètres $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Un premier graphique représente ces trois lois dans un même repère. Deux autres graphiques représentent les écarts entre la loi binomiale et la loi de Poisson, la loi binomiale et la loi normale.

Deux curseurs permettent de modifier n : un petit qui permet de choisir la valeur maximale utilisée par le grand curseur, et un grand qui permet de choisir la valeur de n. Deux autres curseurs fonctionnant sur le même principe permettent de modifier p. Le dernier curseur permet de régler la largeur de l'intervalle utilisé pour les représentations graphiques.

La deuxième feuille du classeur permet de choisir une fourchette $[a,b]$ et donne les probabilités correspondantes.

Exercice VI : En manipulant le classeur, trouver une valeur pour n et une valeur pour p telles que les trois lois soient très proches l'une de l'autre. Compléter ensuite le tableau suivant à l'aide du tableur :

	loi binomiale	loi de Poisson	Loi normale
$p(X=0)$			
$p(X=1)$			
$p(X=2)$			
$\vdots$			

Exercice VII : On suppose que $n=60$, $p=0.05$. On veut vérifier si l'on peut approcher la loi Binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. Compléter pour cela le tableau suivant à l'aide du tableur :

	Loi Binomiale	Loi de Poisson
$p(X=0)$		
$p(X=1)$		
$p(X=2)$		
$p(X=3)$		
$p(X=4)$		
$p(X=5)$		
$p(X=6)$		
$p(X=7)$		
$\vdots$		

Exercice VIII : On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres 50 et $\frac{1}{2}$. On réalise 50 épreuves aléatoires indépendantes. Calculer, puis représenter sur un diagramme en bâton les valeurs prises par cette loi binomiale. On mettra en abscisse 0,1,2,3,...50, et en ordonnée $p(X=0)$, $p(X=1)$, ... $p(X=50)$.

Tracer la courbe représentative de la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(25;\frac{5}{\sqrt{2}})$. Que peut-on constater ? Quelle est son espérance ? Quel est son écart-type ?

On complètera le tableau suivant :

x	$p(X=x)$	$f(x)$
0		
1		
2		
3		
4		
$\vdots$		
48		
49		
50		

avec

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2}$$