$Posons\ f(x) = sin(x)^{cos(x)} + cos(x)^{sin(x)}$

$Sur\ \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\ on\ a\ 0 < sin(x) < 1\ et\ 0 < cos(x) < 1$

$On\ sait\ que\ pour\ tout\ réel\ y, z\ sur\ ]0; 1[, on\ a\ y < y^z$

$On\ peut\ si\ on\ le\ souhaite\ le\ démontrer\ par\ l'absurde$:

$Supposons\ y \geq y^z$

$On\ a\ donc\ aussi\ y \geq y^{1-z}\ car\ (1-z) \in]0; 1[$

$En\ multipliant\ les\ inéquations\ on\ obtient$:

$y \geq y^z * y^{1-z}\ soit\ y^2 \geq y$

$Or\ y^2 < y\ car\ 0 < y < 1, d'où\ la\ contradiction$

$Dans\ notre\ cas\ nous\ avons\ donc$:

$sin(x)^{cos(x)} > \sin(x)$

$cos(x)^{sin(x)} > \cos(x)$

$Donc\ f(x) = sin(x)^{cos(x)} + cos(x)^{sin(x)} > \sin(x) + \cos(x) = g(x)\ sur\ \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$g\ est\ dérivable\ sur\ \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\ et\ g'(x) = cos(x) - sin(x)$

$g'\ s'annule\ en\ \frac{\pi}{4}, est\ positive\ sur\ \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\ et\ négative\ sur\ \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

$g\ est\ donc\ strictement\ croissante\ sur\ \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\ et\ strictement\ décroissante\ sur\ \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

g(0)=1

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$Donc\ 1 < g(x) < \sqrt{2}$

$Donc\ f(x) > g(x) > 1\ sur\ \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$Donc\ sin(x)^{cos(x)} + cos(x)^{sin(x)} > 1\ sur\ \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$