Éxercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Numération de plaques.

Partie A :

La mairie d'une ville décide de refaire les plaques des maisons. Pour fabriquer les plaques, les deux ouvriers chargés de cette mission cherchent à savoir le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de toutes les plaques de la ville.
Les deux ouvriers commencent par étudier chaque rue de la ville .

Cas parciculier :

1. Déterminer le nombre de chiffres nécessaires pour écrire toutes les plaques d'une rue contenant 99 maisons
2. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de toutes les plaques d'une rue contenant 999 maisons est de $3 \times 10^3 - 111$.
3. Un des ouvriers affirme qu'ils auront besoin de 2016 chiffres pour écrire les plaques d'une rue de 708 maisons. Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier votre réponse.

Généralisation :

1. Soit M un entier naturel constitué de n chiffres. Montrer que $10^{n-1} \leq M$
2. Déterminer le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de plaques numérotées de 1 à $(10^{n-1} - 1)$.
3. Déterminer le nombre de chiffres nécessaires pour écrire toutes les plaques numérotées de 10^{n-1} à M.
4. En déduire le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de 1 à M plaques.

Partie B :

Dans une rue qui compte moins de mille maisons, les deux ouvriers commencent à peindre les plaques, ils travaillent à des vitesses différentes. Pendant que l'un peint quatre chiffres, l'autre en peint cinq.

Ils ont décidé de procéder de la manière suivante : le moins rapide commence par les premiers numéros et l'autre par les derniers.

Ils terminent de peindre leur dernière plaque en même temps et chacun a peint exactement le même nombre de plaques.

Combien de maisons compte donc cette rue ?

Éxercice académique numéro 2 : grilles magiques
(à traiter uniquement par les candidats des séries STI2D, STL et STD2A)

On considère une grille carrée dont chaque côté présente n cases (n entier supérieur ou égal à 2). Chaque case est repérée par ses coordonnées de la forme $(\text{ligne}, \text{colonne})$. Avec $n = 3$, la grille est donc :

case $(1,1)$	case $(1,2)$	case $(1,3)$
case $(2,1)$	case $(2,2)$	case $(2,3)$
case $(3,1)$	case $(3,2)$	case $(3,3)$

On place n jetons dans la grille de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne exactement un jeton. On obtient alors une grille qualifiée de valable :

grille valable

○		
		○
	○	

grille non valable

	○	
		○
	○	

1/ Dans cette question, on considère une grille de côté n et on souhaite compter, en fonction de n, le nombre de grilles valables que l'on peut former.

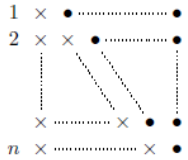
Pour former une grille valable, on suppose que l'on place d'abord un jeton sur la première ligne, puis un deuxième jeton sur la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne.

a/ Combien de possibilités a-t-on pour placer le premier jeton ? Et pour placer le second ?

b/ Au total combien existe-t-il de grilles valables ? On pourra donner le résultat sous forme d'un produit et en fonction de n.

2/ *Une question intermédiaire.*

On veut calculer la somme $1 + 2 + \cdots + n$. Cette somme est égale au nombre de croix dans le schéma suivant :



Combien ce schéma compte-t-il de symboles en tout (croix + ronds) ? En déduire que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3/ Dans cette question, on numérote les cases de la grille de 1 à n^2. Avec $n = 3$, la grille est donc :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

On place ensuite des jetons pour obtenir une grille valable et on note S la somme des nombres des cases occupées.

a/ *Conjecture*

Dans le cas où $n = 3$, donner deux grilles valables et calculer pour chacune d'elle la somme S correspondante. Que conjecturez-vous ?

Dans la suite de l'exercice, on souhaite prouver cette conjecture.

b/ On appelle $N(i,j)$ le nombre figurant dans la case (i,j) de la grille numérotée.

(i) Quels sont les nombres figurant sur la première ligne ? En déduire la valeur de $N(1,j)$.

(ii) Lorsqu'on passe d'une case à celle située juste en dessous, quelle valeur ajoute-t-on ? En déduire les valeurs de $N(2,j)$ et de $N(3,j)$.

(iii) Donner finalement la valeur de $N(i,j)$ en fonction de n, i et j.

c/ Pour chaque i variant de 1 à n, on note $c(i)$ le numéro de la colonne qui contient le jeton de la ligne i. Ainsi les jetons sont placés dans les cases de coordonnées $\big(1,c(1)\big)$, $\big(2,c(2)\big)$, $\ldots$, $\big(n,c(n)\big)$.
Par exemple, pour $n=3$ et avec la grille suivante, on a $c(1)=3$, $c(2)=1$, $c(3)=2$:

1	2	3◯
4◯	5	6
7	8◯	9

Calculer la somme $c(1)+c(2)+\cdots+c(n)$ dans le cas d'une grille valable de côté n. On expliquera le raisonnement et on pourra utiliser le résultat de la question **2**/.

d/ *Preuve de la conjecture*
Calculer la somme S et conclure sur la conjecture émise.

Exercice académique numéro 2 à traiter uniquement par les candidats des séries ES, L ou STMG

Les réseaux sociaux

Le 1er janvier 2016, Marc s'inscrit sur un réseau social et enregistre deux amis.
Le 2 janvier, chacun de ses deux amis lui propose de devenir ami avec deux autres personnes et il accepte.
Le 3 janvier, chacun de ses nouveaux amis lui propose, à nouveau, de devenir ami avec deux autres personnes. Il accepte encore.
Son cercle d'amis s'agrandit ainsi : chaque jour, tous ses nouveaux amis (uniquement ceux acceptés la veille) lui proposent de devenir ami avec deux nouvelles personnes.

1. (a) Justifier que le 2 janvier, le cercle de Marc compte 6 amis.
   (b) Combien d'amis compte le cercle de Marc le 3 janvier ? le 4 janvier ? le 5 janvier ?
2. On utilise un tableur pour remplir le tableau suivant. Quelle formule doit-on rentrer dans la cellule D2 pour, ensuite, la recopier vers la droite ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Numéro du jour de l'année	1	2	3	4	5	6	7
2	Nombre d'amis dans le cercle de Marc	2	6					

3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $A(n)$ le nombre d'amis que compte le cercle de Marc au jour n de l'année. Montrer que $A(n+2) = 3A(n+1) - 2A(n)$.
4. (a) L'algorithme ci-dessous permet d'afficher le nombre d'amis que compte le cercle de Marc pour un jour n donné par l'utilisateur. Recopier entièrement l'instruction en gras et la compléter à l'aide des questions précédentes.

   Variables : n est un entier supérieur ou égal à 3
   i, u, v et a sont des entiers
   Traitement : Demander à l'utilisateur la valeur de n.
   u prend la valeur 2
   v prend la valeur 6
   Pour i allant de 3 à n
   a prend la valeur .....
   u prend la valeur v
   v prend la valeur a
   FinPour
   Sortie : Afficher a

   ⚠ *Ne rien inscrire sur le sujet.*

   (b) Écrire un algorithme qui permet d'afficher à partir de quel jour, le cercle de Marc aura dépassé un nombre N d'amis donné à saisir par l'utilisateur.
5. On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $A(n) = a \times 2^n + b$.
   Déterminer les valeurs des réels a et b.
6. Théoriquement, sachant que la France dénombrait 65,5 millions d'habitants au 1er janvier 2016, à partir de quel jour Marc pourrait-il prétendre avoir pour amis l'équivalent au moins de toute la population française ?

Exercice académique n°2 : Tirage à la fête foraine

À traiter uniquement par les candidats de la série S.

Un stand de fête foraine propose aux passants de tirer successivement deux boules dans un sac composé de boules noires et blanches. Les boules sont numérotées à partir de 1 dans chaque couleur. Le passant gagne s'il tire deux boules de couleurs différentes, peu importe le numéro.

Le forain souhaiterait que le passant ait plus de chances de perdre, alors que le passant souhaiterait avoir plus de chances de gagner. Nous allons nous intéresser à la situation équitable (hors mise et prix) où les deux protagonistes visent une probabilité de gagner de $\frac{1}{2}$.

Le but de cet exercice est de connaître le contenu d'un sac qui permette d'atteindre cette probabilité de $\frac{1}{2}$. On note n le nombre total de boules dans le sac et a le nombre de boules blanches. (a et n sont des entiers naturels tels que $2 \leq a \leq n$.)

Toutes les compositions d'un sac ne permettent pas d'atteindre cet objectif. En effet, un sac composé de quatre boules noires et deux boules blanches (on a donc $n = 6$ et $a = 2$) donne une probabilité de gagner de 8/15.

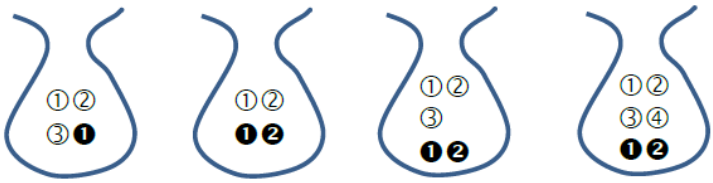
Les tirages possibles sont :

Tirages perdants	
B1-B2	B2-B1
N1-N2	N2-N1
N1-N3	N3-N1
N1-N4	N4-N1
N2-N3	N3-N2
N2-N4	N4-N2
N3-N4	N4-N3

Tirages gagnants	
B1-N1	N1-B1
B1-N2	N2-B1
B1-N3	N3-B1
B1-N4	N4-B1
B2-N1	N1-B2
B2-N2	N2-B2
B2-N3	N3-B2
B2-N4	N4-B2

La notation B2-N3 signifie qu'on a tiré la boule blanche n°2 au premier tirage puis la boule noire n°3 au second tirage.

1. Parmi les sacs suivants, quels sont ceux pour lesquels la probabilité que le passant gagne est 1/2 ?



2. Établissons deux résultats préliminaires pour la suite de l'étude.
   a. On tire deux boules successivement et sans remise dans un sac contenant n boules. Donner le nombre de tirages distincts possibles en fonction de n.
   b. Un sac contient n boules dont a blanches, le reste étant des noires. On extrait successivement et sans remise deux boules de ce sac. Combien y a-t-il de tirages avec deux boules de couleurs différentes en fonction de n et a?

3. Un passant arrive sur un stand où il y a un sac avec 10 boules, mais il ne connait pas la répartition entre boules blanches et boules noires. En étudiant toutes les répartitions possibles, est-il possible que ce passant ait une probabilité de gagner égale à ½ ? Reprendre la question si le sac contenait seulement 9 boules.
4. Étude du cas général. Le sac contient n boules, dont a noires.
   a. Déterminer, en fonction de n et a, la probabilité $p(a;n)$ que le passant gagne.
   b. Montrer que l'équation $p(a;n) = \frac{1}{2}$ est équivalente à $4a^2 - 4na + n(n-1) = 0$.
   c. En considérant que l'inconnue est a, résoudre cette équation.
   d. Quelle caractéristique doit avoir le nombre n pour que l'équation $p(a;n) = \frac{1}{2}$ admette des solutions ? Comment peut alors être composée l'urne pour répondre au problème posé ?