



# Olympiades nationales de mathématiques

## Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

## Exercices académiques

Académie de Poitiers

Les candidats traitent **deux exercices**.



**Exercice académique n°1 : Toutes séries**  
**Ampoules clignotantes**

On dispose en ligne plusieurs ampoules électriques branchées. On les numérote à partir de 1 en partant de celle la plus à gauche.

Au départ, lors de la première minute de l'expérience, seule l'ampoule située à gauche (notée N°1) est allumée. Et elle restera toujours allumée.

Par la suite, toutes les minutes, pour les autres ampoules, l'opération suivante est réalisée : chaque ampoule change d'état (elle s'allume ou elle s'éteint) si et seulement si celle située à sa gauche était allumée lors de la minute d'avant.

1. On commence par étudier l'état des 20 premières ampoules au cours des 17 premières minutes. Par convention, une ampoule allumée sera représentée par un disque blanc et une ampoule éteinte par un disque noir. En annexe est fournie une représentation de ces 20 ampoules. Les 11 premières minutes de l'étude sont représentées (la première ligne correspond à la 1<sup>ère</sup> minute durant laquelle seule l'ampoule N°1 est allumée, la suivante correspond à la 2<sup>ème</sup> minute où seules les ampoules N°1 et N°2 sont allumées ...). Les minutes allant de la 15<sup>ème</sup> minute à la 17<sup>ème</sup> minute sont aussi représentées. Compléter l'annexe pour représenter l'état des 20 ampoules au cours des minutes 12 à 14.
2. On considère l'ampoule N°2. Quel est son état durant la  $K^{\text{ème}}$  minute, pour  $K$  entier naturel non nul ? Justifier la réponse.
3. Soit  $K$  un entier naturel non nul. Expliquer pourquoi l'ampoule N° $K$  s'allume pour la première fois lors de la  $K^{\text{ème}}$  minute.
4. On souhaite décrire l'état des ampoules durant la  $K^{\text{ème}}$  minute, où  $K$  est de la forme  $K = 2^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Qu'en est-il au cours des minutes de la forme  $K = 2^n$  pour  $n$  allant de 0 à 4 ?
  - (b) Énoncer une généralisation pour l'état des ampoules durant une minute  $K = 2^n$ . On admettra le résultat.
5. Justifier que durant la  $K^{\text{ème}}$  minute, où  $K$  est un entier de la forme  $K = 2^n + 1$ , deux ampoules seulement sont allumées.
6. Décrire l'état des ampoules entre les minutes  $K = 2^n + 1$  et  $K = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ . On comparera en particulier avec l'état observé entre les minutes  $K = 1$  et  $K = 2^n$ .
7. Soit un entier  $K$ ,  $K \geq 2$ , on admet qu'il existe un seul entier naturel  $n$  vérifiant  $2^n + 1 \leq K \leq 2^{n+1}$ .
  - (a) Rédiger un algorithme répondant à la problématique suivante : l'utilisateur donne un entier  $K$  et l'entier  $n$  défini ci-dessus lui est donné en sortie.
  - (b) Quel est le lien entre le nombre d'ampoules allumées lors de la  $K^{\text{ème}}$  minute et le nombre d'ampoules allumées lors de la minute  $(K - 2^n)$  ?
8. L'expérience s'arrête lorsque l'ampoule N°2018 s'allume pour la première fois. Combien d'ampoules sont alors allumées ?

Annexe de l'exercice 1 toutes séries à rendre avec la copie

|                          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 <sup>ère</sup> minute  | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 2 <sup>nde</sup> minute  | ○ | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 3 <sup>ème</sup> minute  | ○ | ● | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 4 <sup>ème</sup> minute  | ○ | ○ | ○ | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 5 <sup>ème</sup> minute  | ○ | ● | ● | ● | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 6 <sup>ème</sup> minute  | ○ | ○ | ● | ● | ○ | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 7 <sup>ème</sup> minute  | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 8 <sup>ème</sup> minute  | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 9 <sup>ème</sup> minute  | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 10 <sup>ème</sup> minute | ○ | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ○ | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 11 <sup>ème</sup> minute | ○ | ● | ○ | ● | ● | ● | ● | ○ | ● | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 12 <sup>ème</sup> minute | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 13 <sup>ème</sup> minute | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 14 <sup>ème</sup> minute | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 15 <sup>ème</sup> minute | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ | ● | ○ |
| 16 <sup>ème</sup> minute | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 17 <sup>ème</sup> minute | ○ | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ○ | ● | ● | ● | ● |

## Exercice académique n°2 : Série S L'éventail japonais

Dans un éventail ouvert aux deux tiers, on inscrit cinq cercles comme indiqué sur la figure 1. Celle-ci admet pour axe de symétrie, la médiatrice de  $[BC]$ .

Les cercles de la partie supérieure sont tangents entre eux, au segment  $[CB]$  et à l'arc de cercle  $\widehat{CB}$ .

Les deux cercles de la partie inférieure sont tangents aux côtés  $[OC]$  ou  $[OB]$ , à  $[CB]$  et à l'arc de cercle  $\widehat{LK}$ .

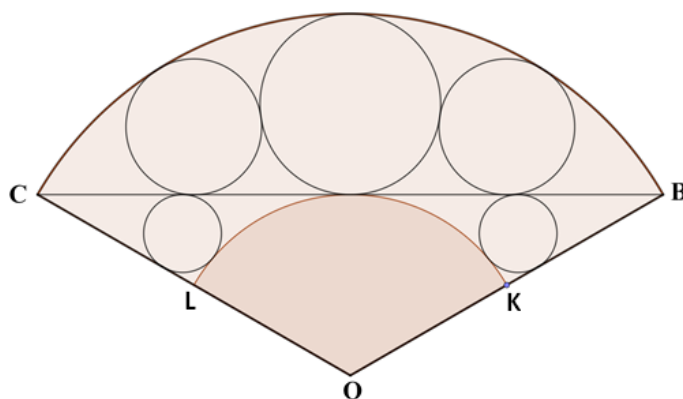
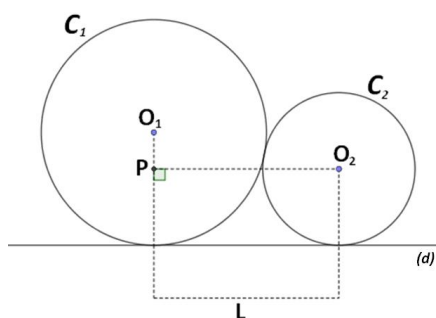


Figure 1

Pour effectuer la construction, on cherche à exprimer les rayons de chaque cercle en fonction du demi-rayon de l'éventail, soit en fonction de  $R_1 = \frac{OB}{2}$ .

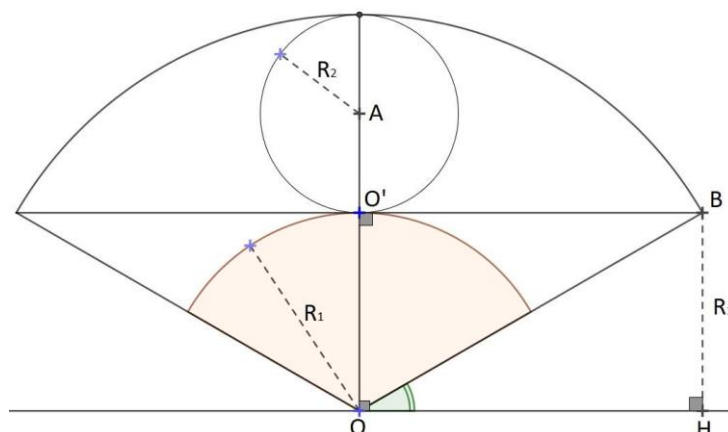
### 1. Préliminaire



Les cercles  $C_1$  et  $C_2$  ci-dessus de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  sont tangents entre eux et à la droite  $(d)$ .  
Montrer que la longueur  $L$  est égale à  $2\sqrt{R_1R_2}$ .

### 2. Relation entre $R_1$ et $R_2$

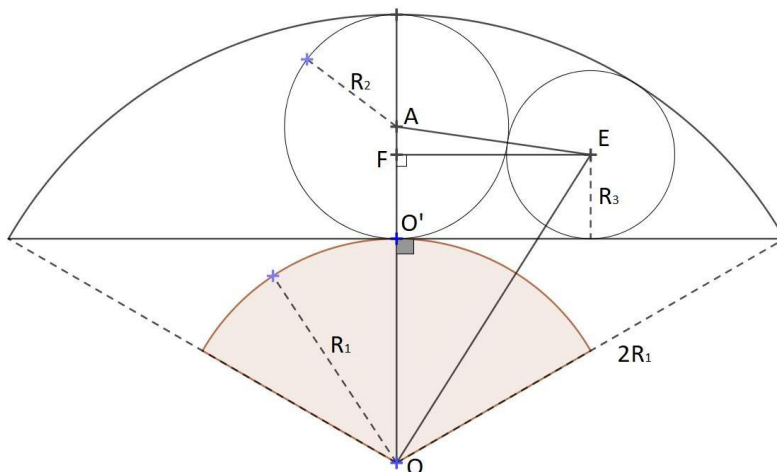
On utilisera les notations du schéma ci-contre.  
Exprimer  $R_2$  en fonction de  $R_1$ .



### 3. Relation entre $R_1$ et $R_3$

On utilisera les notations du schéma ci-contre.

- En utilisant la partie préliminaire, exprimer les longueurs des côtés du triangle  $OEF$  en fonction de  $R_1$  et  $R_3$ .
- En déduire que  $R_3 = \frac{3}{8} R_1$ .



### 4. Relation entre $R_1$ et $R_4$

On utilisera les notations du schéma ci-contre.  $W$  est le centre de  $C_4$ .

Dans cette partie, on pourra utiliser que  $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ .

- En déduire la relation  $\frac{R_4}{R_1\sqrt{3}-2\sqrt{R_1R_4}} = 2 - \sqrt{3}$ .
- En posant  $X = \sqrt{\frac{R_4}{R_1}}$ , justifier que  $X$  est solution de l'équation :  $X^2 = (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 2X)$ .
- En résolvant cette équation, exprimer  $R_4$  en fonction de  $R_1$ .

