



Olympiades nationales de mathématiques 2019

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Académie de Poitiers

Les candidats traitent les **deux exercices**.

Exercice académique n°1 : Toutes séries

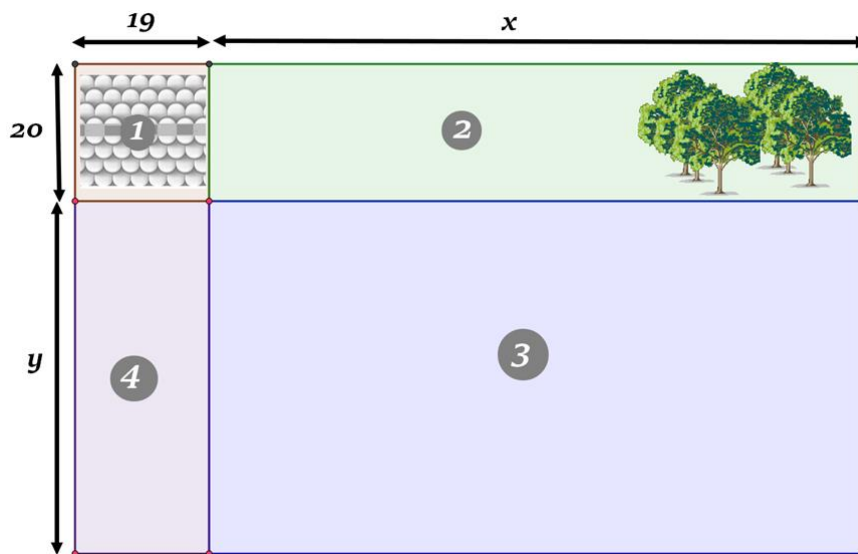
L'exercice est décomposé en deux parties entièrement indépendantes. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte.

Partie A : Aménagement d'un gîte

Un agriculteur veut aménager un terrain pour installer son unique fils qui a décidé de s'occuper d'un gîte déjà construit sur la parcelle ①. La parcelle ② servira de jardin pour les clients du gîte. La parcelle ④ correspond au jardin personnel du fils. L'aire totale de ces deux parcelles est de 2019 m^2 .

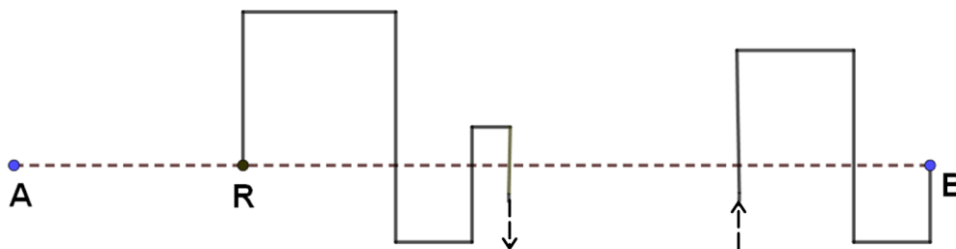
Le père conserve la parcelle ③ pour s'y installer.

Les longueurs s'expriment en mètres, x et y sont des nombres entiers. Le père veut posséder la parcelle ayant la plus grande aire possible (pour toutes valeurs de x et y entières). Déterminer les aires de chaque parcelle. On pourra commencer par trouver une relation entre x et y .



Partie B : Chemin forestier

Devant le gîte A se trouve une route rectiligne de 3 kilomètres menant au village B. Un point R, correspondant à l'entrée de la forêt, se trouve à 750 mètres du point A. Entre R et B, un chemin forestier forme avec la route des carrés, comme représenté ci-dessous :



1°) Alex et Hugo ont loué le gîte. Le jour même, ils décident tous deux de se promener. Alex part à pied à 12h de l'extrémité A à une vitesse constante de $4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et rejoint le point B par la route.

Hugo, lui, fait le parcours en VTT, à une vitesse constante de $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Il part de A, rejoint le point R par la route, puis continue en empruntant le chemin forestier jusqu'en B.

A quelle heure exacte Hugo doit-il partir de A pour arriver en B en même temps qu'Alex ?

2°) Arrivé en B, Alex repart immédiatement vers A par la route à une vitesse constante de $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Quelle est la vitesse moyenne d'Alex sur le trajet aller-retour ?

3°) Le lendemain, Alex désire partir de l'extrémité B à 12 h, et rejoindre l'extrémité A par la route, marchant, accélérant parfois et se reposant de temps en temps. Hugo lui certifie qu'il repassera à un même endroit sur la route à la même heure que la veille. Hugo a-t-il raison ? Justifier.

Exercice académique n°2 : Série S uniquement
Corrections croisées

A la suite d'une évaluation, un professeur souhaite que ses élèves corrigent chacun une copie. Pour cela il distribue aléatoirement une copie par élève. Le professeur souhaite par ailleurs qu'aucun élève ne corrige sa propre copie, pour éviter qu'il ne soit tenté de tricher en se notant généreusement. Si lors de la distribution un élève reçoit sa copie, le professeur procède à une nouvelle distribution complète de toutes les copies. Si aucun élève ne reçoit sa propre copie à corriger, la distribution est qualifiée de type A ("acceptable"), sinon elle est qualifiée de type R ("refusée").

Partie A : Cas particulier : n = 3 copies.

On considère qu'il s'agit d'une très petite classe, avec 3 copies C_1, C_2 et C_3 appartenant respectivement à 3 élèves E_1, E_2 et E_3 .

1. En utilisant un arbre ou un tableau, faire la liste de toutes les distributions possibles de copies.
2. Combien y a-t-il de distributions de type A ?
3. En déduire la probabilité que la première distribution suffise pour commencer la correction.

Partie B : Cas général.

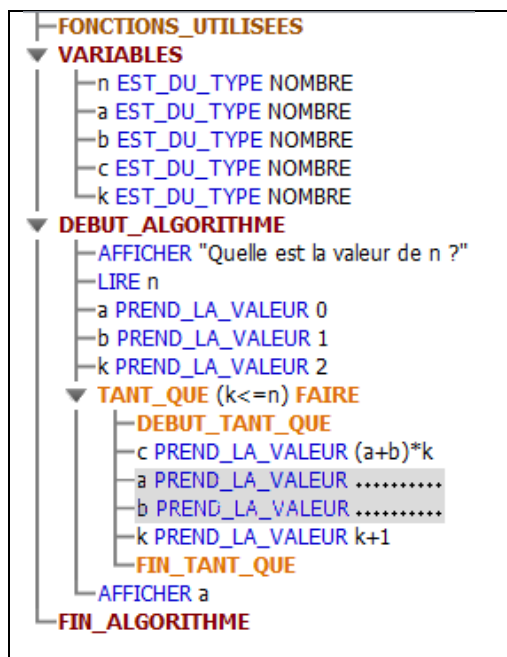
On considère n élèves E_1, E_2, \dots et E_n dont les copies respectives sont C_1, C_2, \dots et C_n . On ne considère plus que des distributions de type A, et on note a_n leur nombre. La valeur a_3 a été trouvée à la question A2.

1. On s'intéresse à l'événement B défini par : "l'élève E_1 va corriger la copie C_2 ".
 - (a) Justifier que $P(B) = \frac{1}{n-1}$.
 - (b) On souhaite calculer $P(B)$ autrement.
 - i. **Cas 1** : l'élève E_2 corrige la copie C_1 . Montrer que dans ce cas le nombre de distributions est a_{n-2} .
 - ii. **Cas 2** : l'élève E_2 ne corrige pas la copie C_1 . Combien y en a-t-il de distributions qui conviennent ?
 - iii. En déduire que $P(B) = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_n}$.

(c) En déduire une relation donnant a_n en fonction de a_{n-1} , de a_{n-2} et de n .

2. Donner les valeurs de a_1 et a_2 , puis retrouver la valeur de a_3 obtenue plus haut. En déduire la valeur de a_4 à l'aide de la relation précédente.

3. On souhaite écrire un algorithme permettant d'obtenir la valeur de a_n en fournissant la valeur de n ($n \geq 1$). Recopier et compléter les deux lignes à trous dans l'algorithme ci-contre pour répondre à la question posée.







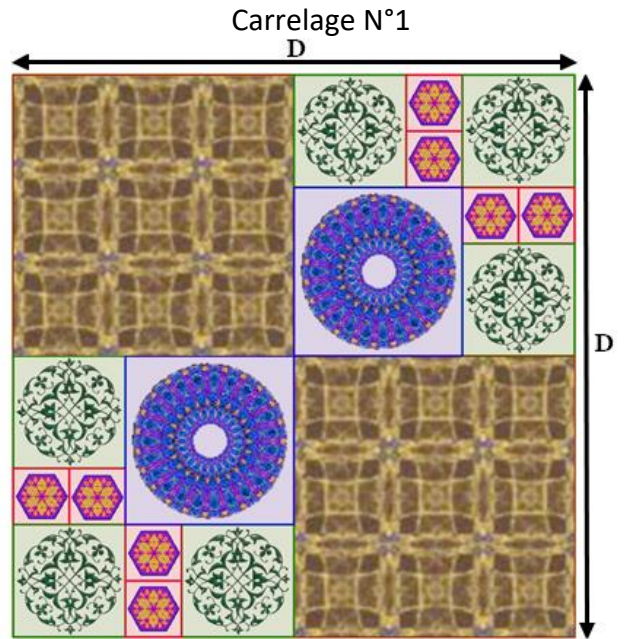
Partie C :

On suppose ici que la classe compte 10 élèves. Quelle est la probabilité que le professeur ait à procéder à exactement deux distributions pour en obtenir une acceptable ?

Exercice académique n°2 : autres séries que S
Mosaïque carrément posée





A. On a fabriqué un carrelage carré N°1 de côté $D > 0$ avec une mosaïque de quatre carrés de dimensions différentes. On veut que les longueurs des côtés de tous les carrés soient des entiers.

Eléments 1	Eléments 2
Carré de côté a 	Carré de côté b 
Nombre de carrés = 2	Nombre de carrés = 2
Eléments 3	Eléments 4
Carré de côté c 	Carré de côté d 
Nombre de carrés = 6	Nombre de carrés = 8



- 1°) Déterminer la longueur D du côté du carrelage N°1 lorsque $d = 8$.
- 2°) Déterminer les dimensions de chacun des carrés qui composent ce carrelage lorsque $D = 110$.

B.

Eléments 1	Eléments 2	Eléments 3	Eléments 4
Carré de côté e 	Carré de côté f 	Carré de côté g 	Carré de côté h 
Nombre de carrés = 4	Nombre de carrés = 4	Nombre de carrés = 4	Nombre de carrés = 5

On veut fabriquer cette fois-ci un carrelage carré N°2 de côté 176 avec une mosaïque de quatre carrés de dimensions différentes. On veut que les longueurs des côtés de tous les carrés soient des entiers. On a représenté ci-dessus les éléments de ce carrelage carré.

On supposera de plus que :

$$\begin{cases} g > h \geq 1. \\ f = g + h \\ e = f + h \end{cases}$$

- 1°) Démontrer que $12f^2 + 13h^2 = 30976$.
En déduire que $1 \leq h \leq 48$.

- 2°) On a fait fonctionner l'algorithme ci-contre :
Pour $x \geq 0$, $\text{sqrt}(x)$ désigne \sqrt{x} .
 $\text{floor}(x)$ désigne la partie entière de x :
Exemple : $\text{floor}(2,547) = 2$.

Que dire d'un nombre positif x tel que :
 $x - \text{floor}(x) = 0$?

- 3°) Réaliser le pavage sur l'annexe ci-jointe.
(On ne demande pas de reproduire les motifs à l'intérieur des carrés)

- 4°) On reprend le B. 1°), mais ici la longueur du côté du carrelage D est un entier naturel non nul.
 - a) Montrer que D est divisible par 11 si $D = 2e + f$
 - b) Déterminer les dimensions e, f, g et h lorsque $D = 660$.

Code de l'algorithme

```

1  VARIABLES
2  f EST_DU_TYPE NOMBRE
3  h EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5  POUR h ALLANT_DE 1 A 48
6  DEBUT_POUR
7  f PREND_LA_VALEUR sqrt((30976-13*h*h)/12)
8  SI (f-floor(f)=0) ALORS
9  DEBUT_SI
10 AFFICHER " h = "
11 AFFICHER h
12 AFFICHER " et f = "
13 AFFICHER f
14 AFFICHER " ; "
15 FIN_SI
16 FIN_POUR
17 FIN_ALGORITHME
    
```

Résultats

```

***Algorithme lancé***
h = 16 et f = 48 ; h = 26 et f = 43 ; h = 44
et f = 22 ; h = 46 et f = 17 ;
    
```

Nom :

Prénom :

Série :

Annexe

Mosaïque carrément posée (à rendre avec la copie pour les séries non S)

