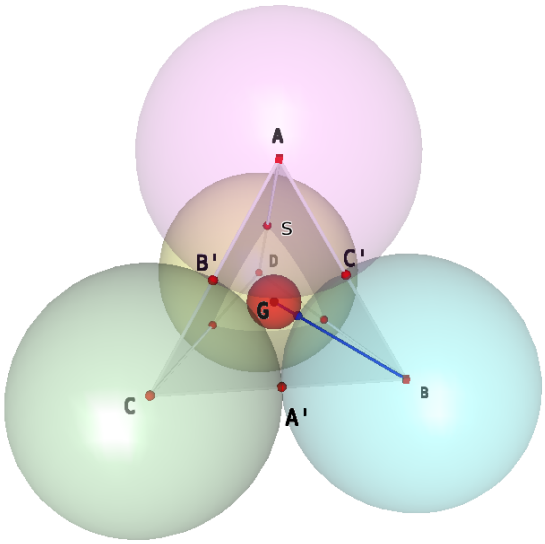
Étant données 4 sphères, dont chacune est en contact avec les 3 autres, comme dans la figure ci-contre, Quelle est le rayon maximum de la sphère que l'on peut insérer entre elles ?



Nous admettons que lorsque deux sphères sont en contact, le plan tangent à ces 2 sphères en leur point de contact, est orthogonal aux 2 vecteurs, dont les origines sont au centre de chaque sphère et qui ont leur extrémité en commun, au point de contact. Les points de contacts sont donc alignés avec les centres des sphères, et ce point est au milieu des deux centres, lorsque ces sphères ont des rayons de même mesure. Par exemple : les vecteurs $\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CA'}$ sur cette figure sont opposés.

Pour des raisons de symétrie les 4 sphères de rayon unité, ont leur centre au sommet d'un tétraèdre ABCD régulier, dont les arêtes ont pour mesure deux unités. la sphère que l'on peut insérer entre elles doit être centrée sur l'isobarycentre G du tétraèdre, on doit calculer la distance : $d = GA = GB = GC = GD$ entre cet isobarycentre et les 4 sommets du tétraèdre régulier. La sphère rouge dans la figure ci-desssus, est en contact avec les 4 autres sphères et a un rayon de mesure $d - 1$.

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle DHA', où H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Ce point H est centre du triangle équilatéral ABC dont les côtés ont pour mesure : 2 et dont les hauteurs vérifient : $AA' = BB' = CC =' \sqrt{3}$.

On a donc : $HA' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, car H est barycentre de $(A', 2)$ et $(A, 1)$.

D'où : $DH^2 = DA'^2 - HA'^2 = 3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$ et $DH = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Donc : $DG = \dfrac{3}{4}DH = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, car H est barycentre de $(H, 3)$ et $(D, 1)$.

Le rayon de la sphère cherchée est donc : $\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1$