Corrigé :

Si on appelle $M_{0,} S_{0,} L_0$ les quantités de Moutons, Serpents et Loups présents sur l'ile tout au début, puis L_n, M_n, S_n les quantités de Loups, Moutons, Serpents après n jours passés sur l'ile, alors les donnés de l'énoncé permettent d'écrire :

$M_{n+1}=M_n-L_n$ car chaque loup commence par tuer un mouton.
$S_{n+1}=S_n-M_{n+1}=S_n-M_n+L_n$ car ensuite chaque mouton tue un serpent
$L_{n+1}=L_n-S_{n+1}=L_n-S_n+M_n-L_n=M_n-S_n$ car enfin , chaque serpent restant tue un loup.

On peut donc écrire pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} M_{n+1}=1\mathrm{M}_n+0\mathrm{S}_n-1\mathrm{L}_n \\ S_{n+1}=-1\mathrm{M}_n+1\mathrm{S}_n+1\mathrm{L}_n \\ L_{n+1}=1\mathrm{M}_n-1\mathrm{S}_n+0\mathrm{L}_n \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire avec la matrice A ci dessous, dite matrice de transition:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{on a :} \qquad \begin{pmatrix} M_{n+1} \\ S_{n+1} \\ L_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_n \\ S_n \\ L_n \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire pour tout entier n :

$$\begin{pmatrix} M_n \\ S_n \\ L_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} M_0 \\ S_0 \\ L_0 \end{pmatrix} \text{ et en particulier, en faisant n=10. } \begin{pmatrix} M_{10} \\ S_{10} \\ L_{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix} M_0 \\ S_0 \\ L_0 \end{pmatrix}$$

D'après l'énoncé , $M_{10}=1, S_{10}=0, L_{10}=0$ et la matrice A^{10} se calcule avec la calculatrice ou un tableur :

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -40 & 16 & 49 \\ 49 & -40 & -33 \\ -33 & 49 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ S_0 \\ L_0 \end{pmatrix} \text{ et donc : } \begin{pmatrix} M_0 \\ S_0 \\ L_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -49 & 16 & 49 \\ 49 & -40 & -33 \\ -33 & 49 & -7 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la matrice inverse se calcule au tableur :

$$\text{Soit : } \begin{pmatrix} M_0 \\ S_0 \\ L_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1897 & 2513 & 1432 \\ 1432 & 1897 & 1081 \\ 1081 & 1432 & 816 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1897 \\ 1432 \\ 1081 \end{pmatrix}$$

Il y avait donc au départ : 1897 moutons , 1432 serpents, 1081 loups.