```
%% Contenu : IA de Mathématiques - POITIERS (Erick Roser)
%% Saisie  : Jean-Michel Sarlat
%% Date    : mercredi 21 mars 2001

%% Usage : MAC
% \documentclass[12pt,a4paper]{article}
% \usepackage[applemac]{inputenc}
% \usepackage{amssymb}
% \usepackage{t1enc}
% \usepackage[frenchb]{babel}
% \usepackage{geometry,mathtime}
% \geometry{margin=2cm,head=0.5cm,headsep=10pt,foot=1cm}

%% Usage : Linux, Windows
% \documentclass[12pt,a4paper]{article}
% \usepackage[latin1]{inputenc}
% \usepackage{amssymb}
% \usepackage{t1enc}
% \usepackage[frenchb]{babel}
% \usepackage{geometry,palatino,euler}
% \geometry{margin=2cm,head=0.5cm,headsep=10pt,foot=1cm}

%=================================================================
==========
\def\C{\mathbf{C}}
\let\le\leqslant
\let\ge\geqslant
% Symboles, notations
\def\abs#1{\vert #1 \vert}
%=================================================================
==========
% Redéfinitions LaTeX
\renewcommand{\theenumi}{\arabic{enumi}}
\def\labelenumi{{\bf \theenumi /}}
\def\labelenumii{{\theenumii)}}
%=================================================================
==========
% Définition de \exo
\newcount\exonumber \exonumber=0
\def\theExoNumber{\bf\the\exonumber}
\def\sautExo{\vskip 15pt}
\def\placeExo{\goodbreak\global\advance\exonumber by 1\par\sautExo
      \noindent{\textbf{Exercice \the\exonumber}}}
\def\exo#1#2{\placeExo\kern1pt ${}^{\hbox{#1}}$ #2\\}
\def\finexo{}
%=================================================================
==========
\everymath{\displaystyle}
\def\titre#1{\begin{center}\Large\sf #1\end{center}}
\def\mention#1{\noindent #1}
\def\ajustement{}
\begin{document}

\titre{Exercices d'entraînement pour la préparation aux Olympiades de
mathématiques du 9 mai 2001}

\mention{\textbf{N.B.}~: Les signes ${}^{\hbox{$\star$}}$ et
```

```
${}^{\hbox{$\star\star$}}$ donnent une indication sur le niveau de la
difficulté. Cette estimation ne peut être que personnelle et subjective.}

\exo{}{}
    L'équation $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$, $x>0$,
    $y>0$, $z>0$, a un ensemble de solutions qui est a) infini~? b)
    vide~? c) réduit à un élément~?
\finexo



\exo{}{}
    Observer, continuer, généraliser~:
    $$\matrix{1&\times&2&\times&3&\times&4&+&1&=&5^2\cr
            2&\times&3&\times&4&\times&5&+&1&=&11^2\cr
              3&\times&4&\times&5&\times&6&+&1&=&19^2}$$
    Existe-t-il une ligne sur laquelle on trouve $2001^2$~?
\finexo

\exo{}{}
    Combien existe-t-il de couples $(x,y)$ d'entiers relatifs tels que~:
    $$\abs{x}+\abs{y}\le 1000\hbox{ ?}$$
\finexo

\exo{$\star$}{}
    Soit un quadrilatère convexe $ABCD$.\\
    La parallèle à $(BD)$ passant par le milieu $I$ de la diagonale
    $[AC]$ et la parallèle à $(AC)$ passant par le milieu $J$ de la
    diagonale $[BD]$ se coupent en~$O$.\\
    Démontrer que les $4$ segments joignant le point $O$ aux
    milieux $M$, $N$, $P$, $Q$ des $4$ côtés $[AB]$, $[BC]$,
    $[CD]$, $[DA]$ partagent le quadrilatère $ABCD$ en $4$
    quadrilatères de même aire.
\finexo

\exo{$\star\star$}{}
    Un certain nombre de jetons sont répartis dans $2n+1$ sachets.
    Supposons que, en retirant l'un quelconque de ces sachets, il
    soit possible de répartir le reste en deux groupes de $n$
    sachets, de telle sorte que chaque groupe contienne le même
    nombre total de jetons. Démontrer que chaque sachet contient le
    même nombre de jetons.
\finexo

\exo{}{}
    Soit $x$ un entier naturel, on pose $p(x)$ le produit de ses
    chiffres. Démontrer que $12$ est l'unique entier naturel $x$
    compris entre $0$ et $100$ tel que~:
    $$x^2-10x-22=p(x)$$
```

```latex
\finexo

\exo{$\star$}{}
    On affecte à chaque point du plan une couleur~: rouge ou bleu.\\
    Montrer qu'il existe au moins un triangle équilatéral dont les
    trois sommets sont de la même couleur.\\[1mm]
    On a affecte à chaque point du plan une couleur~: rouge ou bleu.\\
    Montrer qu'il existe un rectangle dont les sommets sont de la
    même couleur.
\finexo

\exo{$\star$}{}
    On considère un triangle $ABC$ dont la hauteur issue de $C$
    mesure $h$. Quelle est la valeur maximale atteinte par le
    produit des hauteurs lorsque $C$ décrit une droite parallèle à
    la droite $(AB)$~?
\finexo

\exo{$\star\star$}{(Concours général 1986)}
    \begin{enumerate}
        \item  $u$ et $v$ étant deux réels, montrer
        $\abs{u}+\abs{v}\le \abs{u+v}+\abs{u-v}$
        \item  $u_{1}$, $u_{2}$, $u_{3}$, $u_{4}$ étant $4$ réels,
        montrer que~:
           {\ajustement
           $$\abs{u_{1}}+\abs{u_{2}}+\abs{u_{3}}+\abs{u_{4}} \le
           \abs{u_{1}+u_{2}} + \abs{u_{3}+u_{4}} + \abs{u_{1}+u_{3}} +
           \abs{u_{2}+u_{4}} + \abs{u_{1}+u_{4}} + \abs{u_{2}+u_{3}}$$
           }
    \end{enumerate}
    (En fait, dans l'énoncé original on se plaçait dans $\C$)
\finexo


\end{document}
```