Somme d'inverses - Solution

On peut supposer que : $1 < x \leqslant y \leqslant z$. Donc $1 > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$. Donc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{x}$

Or $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ donc $1 \leqslant \frac{3}{x}$ soit $x \leqslant 3$.

Il suffit alors de tester les valeurs de x : 1, 2 et 3.

* $x = 1$.

On trouve alors $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, ce qui est impossible. Donc pas de solution pour $x = 1$.

* $x = 2$.

On a $\frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{y}$ donc $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{2}{y}$.

Mais $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ soit $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{y}$ soit $y \leqslant 4$. De plus $x \leqslant y$ soit $2 \leqslant y \leqslant 4$.

** $y = 2$ et $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{z} = 0$ impossible.

** $y = 3$ et $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$ soit $z = 6$. On a bien $x \leqslant y \leqslant z$ d'où une solution **(2, 3, 6)**.

** $y = 4$ et $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ soit $z = 4$. On a bien $x \leqslant y \leqslant z$ d'où une solution **(2, 4, 4)**.

* $x = 3$.

On a $\frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{y}$ donc $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{2}{y}$.

Mais $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ soit $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$. Donc $\frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{y}$ soit $y \leqslant 3$. De plus $x \leqslant y$ soit $y = 3$.

** $y = 3$ et $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ donne $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ soit $z = 3$. On a bien $x \leqslant y \leqslant z$ d'où une solution **(3, 3, 3)**.

Enfin, sans la condition d'ordre ($x \leqslant y \leqslant z$), il faut ajouter en plus les permutations … D'où les dix solutions :
(2, 3, 6) ; (2, 6, 3) ; (3, 2, 6) ; (3, 6, 2) ; (6, 2, 3) ; (6, 3, 2) ; (2, 4, 4) ; (4, 2, 4) ; (4, 4, 2) ; (3, 3, 3).