Sources :

- Article d'Yves Derriennic dans la gazette de la SMF n°97 2003 https://smf.emath.fr/system/files/filepdf/Gaz-97.pdf
- Mémoire IUFM de Nicolas Trotignon, *Pascal, Fermat et la géométrie du hasard* https://arxiv.org/pdf/1309.2824.pdf
- Travaux de l'IREM :
  http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille11/enonces/enoncesMere/merePb2.html
  et brochure : http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97031.pdf
- Article de Gilles Aldon, (*Pascal, Fermat et le problème des partis*, TDC n° 1098, juin 2015).
- Dossier de l'IREM de Paris :
  https://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites
- Article de Bernard Parzysz, *Fermat, Pascal et le problème des partis* bulletin de l'APMEP n°519 : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA16039.pdf
- Article de Martine Bühler, *Probabilités : un problème historique en classe*, bulletin de l'APMEP n°514 https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA15029.pdf, deuxième version https://www.apmep.fr/IMG/pdf/P1-20-compte-rendu.pdf

1 Présentation du problème (article de Gilles Aldon, TDC n°1098, juin 2015)

Entre juillet et octobre 1654, Pierre de Fermat, magistrat à Toulouse, et Blaise Pascal entretiennent une correspondance mathématique à propos d'un problème proposé par le chevalier de Méré. Les calculs qu'ils développent peuvent être considérés comme les premiers « calculs de probabilité » même s'ils relèvent plus de ce que nous appellerions dans le langage mathématique moderne un calcul d'espérance mathématique.
Voici la situation générale (Coumet, 1967) :

> *Deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard, et le premier qui gagne un nombre de manches déterminé sera déclaré vainqueur. S'ils doivent quitter le jeu avant qu'il soit normalement achevé par la victoire de l'un ou de l'autre, comment doivent-ils partager l'argent qu'ils ont mis au jeu ?*

La correspondance entre Pascal et Fermat au sujet du problème des partis nous est connue de façon incomplète, par trois lettres du premier et deux du second. Nous nous intéresserons aux lettres de Pascal à Fermat datées du 29 juillet 1654 et du 24 août 1654.

2 Lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654

2.1 Texte de la lettre

Antérieurement à la lettre du 29 juillet, il semble y avoir eu une première lettre de Pascal à Fermat et une réponse de Fermat, mais elles n'ont malheureusement pas été retrouvées.

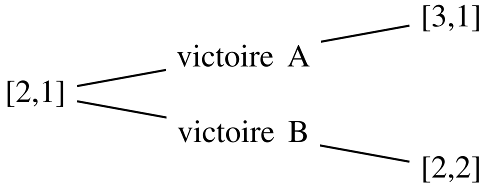
1. Cette appellation est due à Pascal, dont une annexe du Traité du triangle arithmétique (1654) s'intitule *Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties* ; le « parti » désigne ici la façon de répartir la mise totale.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu : Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, il sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.
Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.
Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.
Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas, il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi il y aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.
Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12, et moi 12, qui avec 32, font 44. »

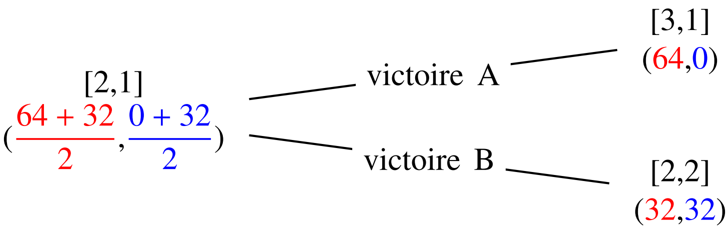
2.2 La solution de Pascal : la méthode "pas à pas"

Le raisonnement repose sur ce que le premier joueur aurait pu espérer gagner selon le cas.
Il part du cas où le joueur A a gagné deux manches et le joueur B seulement une : ce cas correspond à la situation qui est la plus proche de la fin du jeu sans qu'on puisse donner une réponse immédiate à la question du partage.

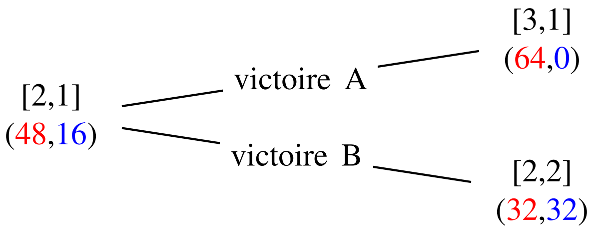
Que devrait être la fortune de A à ce moment ? Si la manche suivante avait jouée, puisque le jeu est de pur hasard, il y aurait eu une chance sur deux pour chaque joueur de remporter cette manche additionnelle ; une chance sur deux donc pour que l'on se trouve dans la situation ou A possède trois manches et B une, et aussi une chance sur deux pour que l'on se trouve avec égalité de A et B chacun ayant gagné deux manches.



Dans le premier cas la règle du jeu donne le pot de 64 pistoles à A. Dans le second cas il faudrait jouer encore une manche et avec égalité des chances A ou B l'emporterait ; donc dans ce second cas la fortune de A doit être la moitié du pot, soit 32 pistoles. Puisque ces deux éventualités ont la même chance de se produire, la fortune de A à présent doit être la moyenne de ces ceux sommes. Autrement dit dans l'exemple considéré, le partage juste est :



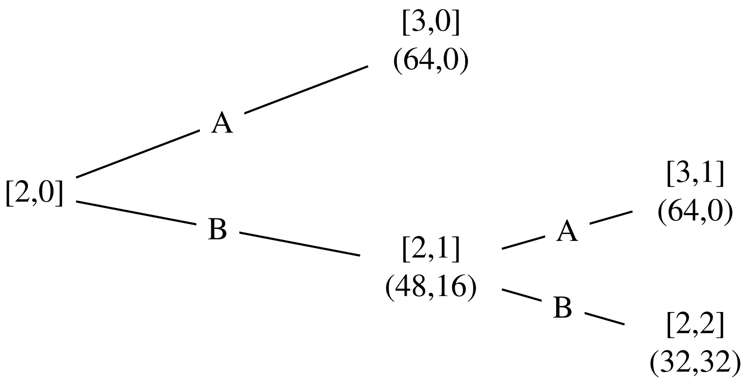
- pour le joueur A, $\frac{1}{2}(64+32) = 48$ pistoles ;
- pour le joueur B, $\frac{1}{2}(0+32) = 16 = 64 - 48$ pistoles.



Aujourd'hui on dirait que la part de A est l'espérance mathématique de la variable aléatoire prenant les valeurs 64 et 32 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. Les historiens des mathématiques s'accordent en effet à reconnaître que la notion d'espérance mathématique est apparue pour la première fois dans ce raisonnement de Pascal, bien que l'expression elle-même, ni d'ailleurs le mot probabilité, n'apparaisse jamais dans ses écrits. Cette expression sera créée quelques années plus tard par Huygens, auteur du premier ouvrage publié consacré au calcul des probabilités, faisant référence à Pascal et au problème des partis.

Une fois cet exemple traité, Pascal présente la solution pour le cas où le joueur A possède deux manches et le joueur B aucune. Avec le même raisonnement que précédemment, il envisage les deux cas :

- une victoire de A qui mène à l'état [3,0] et au gain de la partie pour A donc une répartition (64,0)
- une victoire de B qui le ramène à l'état précédemment étudié [2,1] donc à une répartition de (48,16)

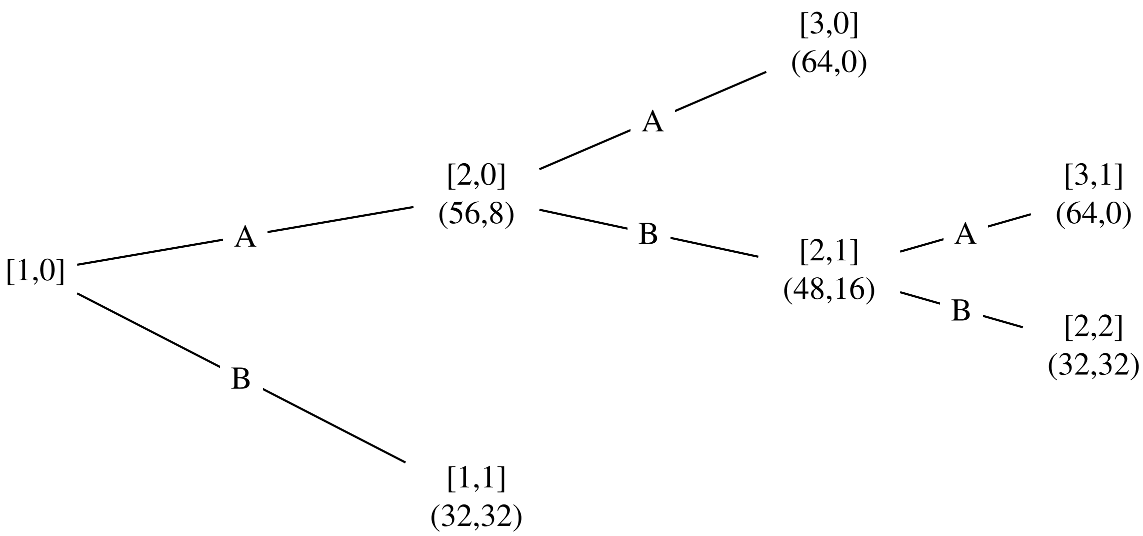


En réitérant les calculs de la première situation, il obtient pour A, 56 pistoles et pour B, 8 :

- pour le joueur A, $\frac{1}{2}(64 + 48) = 56$ pistoles ;
- pour le joueur B, $\frac{1}{2}(0 + 16) = 8 = 64 - 56$ pistoles.

Pascal aborde pour finir la dernière situation où A a gagné une partie et B aucune.
De nouveau, il envisage les deux cas :

- une victoire de A qui le ramène à l'état [2,0] et à la répartition précédente (56,8)
- une victoire de B qui le mène à l'état [1,1] donc à une répartition équitable (32,32)



il obtient pour A, 44 pistoles et B, 20 :

- pour le joueur A, $\frac{1}{2}(56 + 32) = 44$ pistoles ;
- pour le joueur B, $\frac{1}{2}(8 + 32) = 20 = 64 - 20$ pistoles.

L'étude est considéré comme terminée pour Pascal. En effet, en échangeant éventuellement les rôles de A et B, ces trois cas contiennent toutes les possibilités où il n'y a pas égalité des parties gagnées entre les deux joueurs. On voit que l'ordre des trois cas est fondamental, puisque c'est sur lui que se fonde l'argumentation : le premier cas se résout directement, le deuxième se ramène au premier, et le troisième au deuxième ; Pascal procède donc de façon régressive, en remontant de 3 parties jouées à une seule. Le cas le plus complexe est donc le troisième – celui où A a gagné une partie et B aucune.
À chaque fois il opère comme dans le premier exemple : à partir des valeurs finales, 64 ou 0, il calcule de façon récursive les espérances mathématiques correspondant aux situations, rencontrées en remontant vers le début du jeu. La méthode, dite "pas à pas" est ce qu'on appelle de nos jours un raisonnement par récurrence (« rétrograde » ici, ou récurrence descendante). On peut résumer les partis selon le nombre de victoires de chacun dans le tableau suivant :

A \ B	0	1	2	3
0	(32,32)	(20,44)	(8,56)	(0,64)
1	(44,20)	(32,32)	(16,48)	(0,64)
2	(56,8)	(48,16)	(32,32)	(0,64)
3	(64,0)	(64,0)	(64,0)	

On remarque que les valeurs d'une case s'obtiennent en faisant la moyenne des cases voisines en-dessous et à droite.

3 Lettre de Pascal à Fermat du 24 août 1654

3.1 Texte de la lettre

Dans sa lettre à Fermat du 24 août 1654, Pascal émet des doutes sur les méthodes de son correspondant. Pour lancer la discussion sur de bonnes bases, il commence par résumer le contenu de la lettre perdue (la supposée réponse de Fermat à Pascal), ce qui nous en donne un aperçu. Voici donc la deuxième méthode dite « des combinaisons » imaginée indépendamment par Pascal et Fermat pour résoudre le problème des partis.

> *Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs : Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.*
> *Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant ; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée.*
> *Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant, il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : il en peuvent avoir seize qui est le second degré de quatre, c'est-à-dire, le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur*

une de ces seize assiettes :

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

et, parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il en a 11 pour lui ; et parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

3.2 La solution de Fermat : la méthode des combinaisons

La méthode proposée par Fermat s'appuie sur les combinaisons comme le reprend Pascal dans sa précédente lettre. Il se place dans la dernière situation proposée (état [1,0]) et considère qu'il y aura au plus quatre parties à jouer. Il considère alors toutes les combinaisons permettant de placer les deux lettres *a* et *b* dans quatre places : il y en a 16. En effet, une issue est une liste de quatre éléments avec à chaque place deux possibilités : $2^4 = 16$.
Il est intéressant de noter que Fermat utilise toutes les combinaisons même si le jeu devait s'arrêter avant dans la réalité d'une partie. Pascal nomme ce procédé « la condition feinte » et montre plus loin dans sa lettre pourquoi elle est tout à fait légitime. Mais il signale néanmoins que Roberval(11) (1602 – 1675) contestait cette façon de faire, *« vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès qu'un des joueurs aura gagné »*. Il profite de l'occasion pour faire l'apologie de sa propre méthode, mais réfute néanmoins l'objection de Roberval en disant que rien n'empêche de continuer à jouer lorsque l'un des joueurs aura gagné, puisque cela n'aura aucun effet sur la répartition de la somme en jeu.
Cette méthode permet de calculer les partis pour toute situation intermédiaire. Si nous sommes dans l'état [2, 1], 3 points ont été joués et 2 points sont nécessaires au maximum pour terminer le jeu et on peut étudier tous les fins de jeu possibles.

Vainqueur du 4$^{\text{ème}}$ point	Vainqueur du 5$^{\text{ème}}$ point	Résultat final
A	A	A gagne
A	B	A gagne
B	A	A gagne
B	B	B gagne

On voit que 3 cas sur 4 sont favorables à A, on lui accorde donc les $\frac{3}{4}$ de la mise et $\frac{1}{4}$ de la mise à B. Le partage correspondant est (48, 16).
Si nous sommes dans l'état [2, 0], 2 points ont été joués et 3 points sont nécessaires au maximum pour terminer le jeu et on peut étudier tous les fins de jeu possibles.

Vainqueur du 3$^{\text{ème}}$ point	Vainqueur du 4$^{\text{ème}}$ point	Vainqueur du 5$^{\text{ème}}$ point	Résultat final
A	A	A	A gagne
A	A	B	A gagne
A	B	A	A gagne
A	B	B	A gagne
B	A	A	A gagne
B	A	B	A gagne
B	B	A	A gagne
B	B	B	B gagne

On voit, dans ce cas, que 7 cas sur 8 sont favorables à A, on lui accorde donc les $\frac{7}{8}$ de la mise et $\frac{1}{8}$ de la mise à B. Le partage correspondant est (56, 8). Si on est dans la situation [1,0], (celle détaillée par Pascal), en construisant un tableau du même type, on s'aperçoit que sur les seize fins de jeu potentielles, 11 sont favorables à A et 5 le sont à B. A obtiendra les $\frac{11}{16}$ de la mise soit 44 pistoles et B les $\frac{5}{16}$ de la mise, soit 20 pistoles. Les deux méthodes conduisent aux mêmes résultats, ce qui permet à Pascal d'écrire dans sa lettre à Fermat : *« Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris ».*

4 Prolongement : programmation

4.1 Avec une fonction récursive

En fait, la démarche de Pascal dans la méthode "pas à pas" est algorithmique, et mène, si on la formalise de manière plus actuelle, à un algorithme récursif. Il pourrait être intéressant de le formaliser et de montrer que son implémentation dans un langage de programmation comme Python s'avère simple et élégante. Partant de deux entiers naturels a et b compris entre 0 et 3 (car il y aura au maximum 3 parties) non tous deux égaux à 3. Si on note $p(a,b)$ la probabilité de victoire finale de A quand il a gagné a parties et que B en a gagné b : cette probabilité correspond alors à la fraction du pot qui reviendra à A en cas d'arrêt de la partie à l'état $[a,b]$. Pour retrouver la somme qui revient à a, il suffira alors de multiplier le montant du pot (deux fois la mise de chaque joueur) par $p(a,b)$.

Pour construire une fonction récursive, on étudie d'abord les cas de base :

- si $a = 0$ et $b = 3$, alors $p(a,b) = 0$;
- si $a = 3$ et $b = 0$, alors $p(a,b) = 1$

Ensuite on étudie la "remontée" de cas en partant de l'étape d'après : on sait que $p(a,b)$ se calcule en faisant la moyenne des deux cas possibles :

- une victoire de plus pour A, de probabilité $p(a+1,b)$
- une victoire de plus pour B, de probabilité $p(a,b+1)$

On a donc la formule de récurrence :

$$p(a,b) = \frac{1}{2}p(a+1,b) + \frac{1}{2}p(a,b+1)$$

et on a l'algorithme suivant :

Fonction `p`

Fonction p*(a,b)*:
    Si *a=0 et b=3* **alors :**
        renvoie 0
    Sinon si *a=3 et b=0* **alors :**
        renvoie 1
    Sinon :
        renvoie $\frac{1}{2}p(a+1,b) + \frac{1}{2}p(a,b+1)$

que l'on peut généraliser pour un nombre quelconque de parties à atteindre :

Fonction `parti`

Fonction parti*(nb_manches_gagnantes, a, b)*:
    Si *a=0 et b=nb_manches_gagnantes* **alors :**
        renvoie 0
    Sinon si *a=nb_manches_gagnantes et b=0* **alors :**
        renvoie 1
    Sinon :
        renvoie $\frac{1}{2}$parti(nb_manches_gagnantes, a+1, b)+$\frac{1}{2}$parti(nb_manches_gagnantes, a, b+1)

En Python, cela donne les programmes suivants :

Code Python :

```python
def p(a,b):
    """renvoie la probabilité de victoire de A à partir de l'état [a,b] dans le problème historique des partis à 3 manches gagnantes"""
    if a == 3:
        return 1
    elif b == 3:
        return 0
    else:
        return 0.5*p(a+1, b)+0.5*p(a, b+1)

def partis(nb_manches_gagnantes,a,b):
    """renvoie la probabilité de victoire de A à partir de l'état [a,b] dans le problème historique des partis"""
    if a == nb_manches_gagnantes:
        return 1
    elif b == nb_manches_gagnantes:
        return 0
    else:
        return 0.5 * partis(nb_manches_gagnantes, a+1, b) + 0.5 * partis(nb_manches_gagnantes, a, b+1)

def montant_partis(pot,nb_manches_gagnantes,a,b):
    """renvoie la répartition de la somme en cas d'arrêt du jeu à l'état [a,b] pour un nombre nb_manches_gagnantes de victoires à atteindre"""
    montant_a = pot * partis(nb_manches_gagnantes,a,b)
    montant_b = pot - montant_a
    return (montant_a, montant_b)
```

Un appel de la fonction donne les résultats déjà obtenus :

Console Python :

```python
>>> montant_partis(64,3,1,0)
(44.0, 20.0)
>>> montant_partis(64,3,2,0)
(56.0, 8.0)
>>> montant_partis(100,10,0,1)
(40.726470947265625, 59.273529052734375)
```

En revanche, dès que le nombre de parties à atteindre devient important, le nombre d'appels récursifs devient trop élevé et provoque une erreur de dépassement de capacité de récursions. Par exemple, l'appel `montant_partis(50,100,3,4)` ne répond pas.
Une autre possibilité est de passer par une version itérative du calcul en stockant les résultats intermédiaires dans un tableau dont on a déjà abordé le principe :

B / A	0	1	…	col	$col+1$	…	$n-1$	n
0								0
1								0
⋮								⋮
lg				$p(lg,col)$	$p(lg,col+1)$	⋮	…	0
$lg+1$				$p(lg+1,col)$				0
⋮								⋮
$n-1$								0
n	1	1	…	1	1	…	1	

La fonction suivante construit un tableau avec des 0 partout sauf sur la dernière ligne où on met des 1 jusqu'à l'avant dernière colonne. Puis le tableau se remplit de proche en proche en parcourant les lignes et les colonnes. Il suffit ensuite de renvoyer le terme d'indice (a,b) pour retrouver la probabilité de victoire de A, ce qui donne aussi la fraction du pot revenant à A.

Code Python :

```python
def partis_memo(nb_manches_gagnantes,a,b):
    """calcule le tableau de probabilité à tous les états de jeu possibles et renvoie la probabilite demandée pour A"""
    tableau = [[ 0 for colonne in range(nb_manches_gagnantes)] + [0] for ligne in range(nb_manches_gagnantes)] + [[1 for colonne in range(nb_manches_gagnantes)]+[""]]
    for ligne in range(nb_manches_gagnantes-1,-1,-1):
        for colonne in range(nb_manches_gagnantes-1,-1,-1):
            if ligne == colonne:
                tableau[ligne][colonne]= 0.5
            else:
                tableau[ligne][colonne] =  0.5 * tableau[ligne + 1][colonne] + 0.5 * tableau[ligne][colonne + 1]
    return tableau[a][b]
```

Avec cette fonction, il faut certes calculer n^2 valeurs pour une partie en n manches gagnantes mais le calcul est tout de même plus rapide. Pour retrouver le montant revenant à A, il suffit de multiplier le nombre obtenu par le pot total.

Console Python :

```python
>>> partis_memo(100,3,4)
0.4712462848266119
>>> partis_memo(5000,1,0)
0.5039897220418953 # un peu long mais on y arrive au bout de quelques secondes
```

Une autre possibilité serait de travailler sur les fausses diagonales et de ne conserver en mémoire qu'une diagonale pour construire la suivante. Une telle possibilité peut se faire avec un tableau associatif de type "dictionnaire" en Python :

Code Python :

```python
def partis_diag(n,a,b):
    """calcule uniquement la diagonale courante jusqu'à atteindre celle contenant l'état [a,b] dans le cas d'une partie à n victoires"""
    colonne = n - 1
    ligne = n - 1
    dico = {}
    liste_pos = []
    while (a,b) not in liste_pos and ligne >= 0:
        if colonne >= 0:
            indice = (n, colonne)
            liste_pos = [indice]
            for i in range(n-colonne):
                nouveau = (indice[0] - 1, indice[1] + 1)
                liste_pos = liste_pos + [nouveau]
                indice  = nouveau
            colonne = colonne - 1
        else:
            indice = (ligne, 0)
            liste_pos = [indice]
            for i in range(ligne):
                nouveau = (indice[0] - 1, indice[1] + 1)
                liste_pos = liste_pos + [nouveau]
                indice  = nouveau
            ligne = ligne - 1
        dico_ancien = dico
        dico = {}
        for pos in liste_pos:
            if pos[0] == n:
                dico[pos] = 1
            elif pos[1] == n:
                dico[pos] = 0
            else:
                dico[pos] = 0.5*dico_ancien[(pos[0] + 1, pos[1])] +0.5*dico_ancien[(pos[0], pos[1] + 1)]
    return dico[(a,b)]
```

On se rend compte que cette fonction n'est pas plus rapide que la précédente :

Console Python :

```python
>>> import timeit
>>> timeit.timeit(lambda: partis_diag(500,1,0), number=100) # temps d'exécution de 100 appels de la fonction partis_diag
32.12568209999881
timeit.timeit(lambda: partis_memo(500,1,0), number=100) # temps d'exécution de 100 appels de la fonction partis_memo
8.49376180001127
```

On se rend compte que le temps de réponse n'est pas amélioré et est au contraire moins bon que pour la fonction construisant le tableau en entier. En termes de consommation mémoire, on a le même comparatif : l'appel `partis_diag(500,1,0)` consomme 1605 blocs mémoire tandis que l'appel `partis_memo(500,1,0)` n'en consomme que 179.

5 Utilisations en classe

Ce problème historique a déjà fait l'objet d'expérimentations en classe :

- les premiers travaux de l'IREM de Paris publiés dans une brochure de 1986 (p99 à 137) : http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97031.pdf
- Une expérimentation de Nicole Vogel : https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/L_Ouvert/n095/o_95_1-14.pdf
- Une utilisation en classe par Martine Bühler : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA15029.pdf et aussi la page de l'IREM avec des programmes Python et un article de la revue Mnemosyne https://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites

Dans la plupart de ces expérimentations, le problème des partis a été abordé de manière plus large en évoquant les différentes réponses proposées par les précurseurs de Pascal et Fermat (Pacioli, Tartaglia, Forsanti, Cardan) et leurs successeurs (Huygens).

Cette étude historique est aussi l'occasion de mettre en perspective la science en train de se faire : l'émergence des probabilités comme réponse à des problèmes pratiques puis son évolution, au fur et à mesure des contributions, jusqu'à sa formalisation définitive par l'axiomatique de Kolmogorov.