À qui le tour ?

Léo COUNIL
Charlotte GÉ
Lukas LAGRANGE-MICHONNEAU
Benoît PLANCHON
Lucas POITOU

Paul Guerin | Niort
lycée polyvalent

Le problème de Flavius Josèphe

Flavius Josèphe est un historiographe romain juif du 1er siècle.

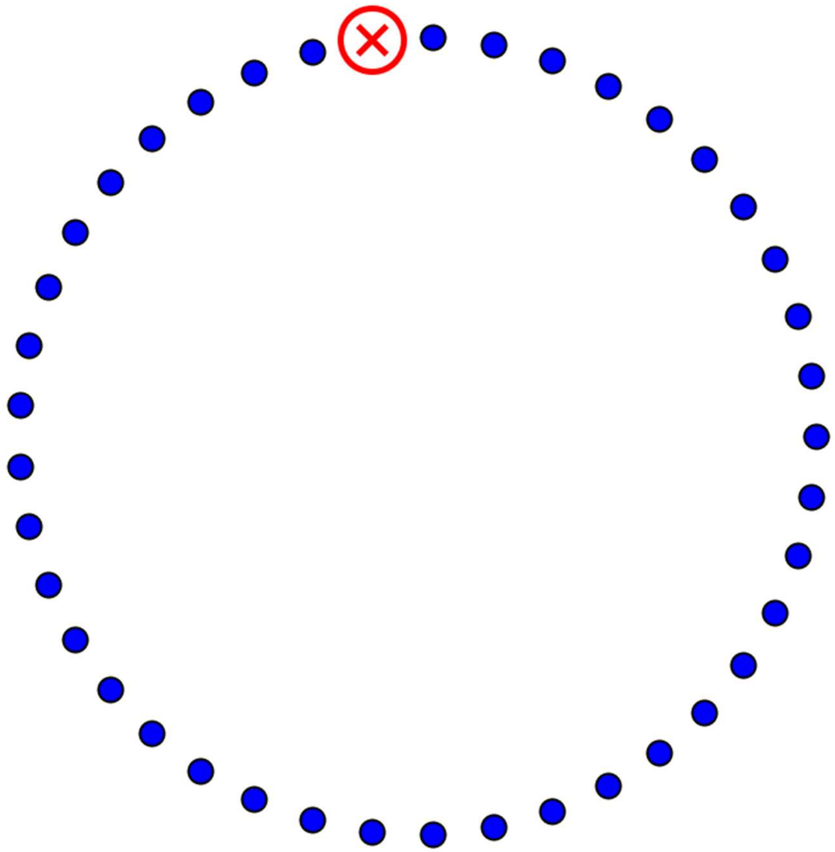

Flavius Josèphe et l'empereur Vespasien

Le problème de Flavius Josèphe

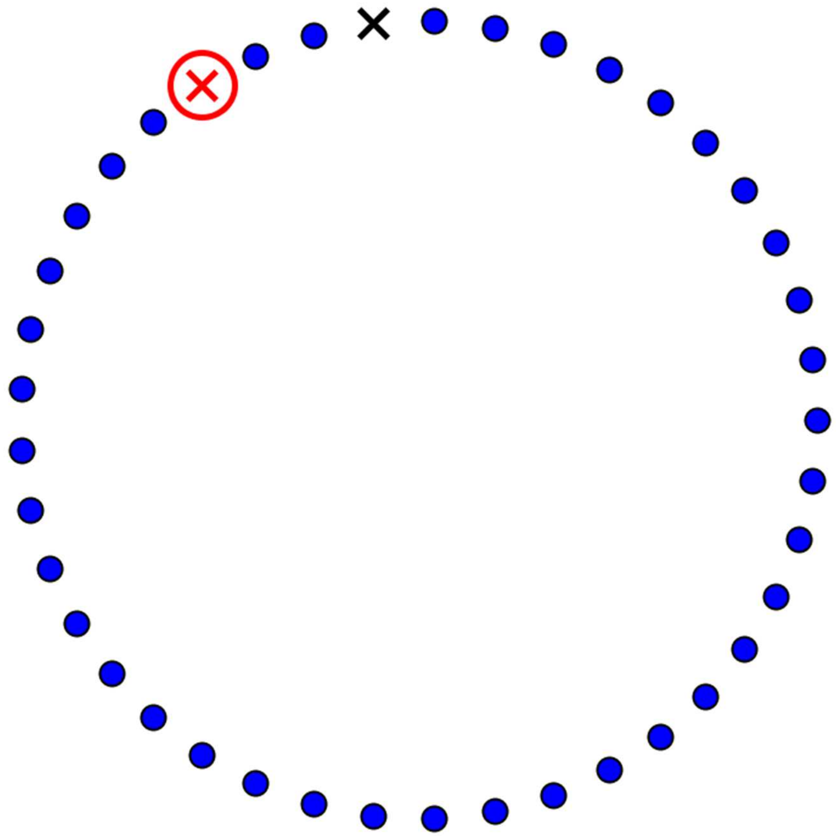
On raconte que lors d'un siège tenu par l'empereur Vespasien il a été confronté à la situation suivante.

Flavius Josèphe et 40 autres soldats juifs cernés par des Romains avaient décidé de se suicider.
Les 41 soldats se sont disposés en cercle.
On en a choisi un au hasard et on l'a éliminé.
On a éliminé ensuite un soldat sur trois jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un seul.

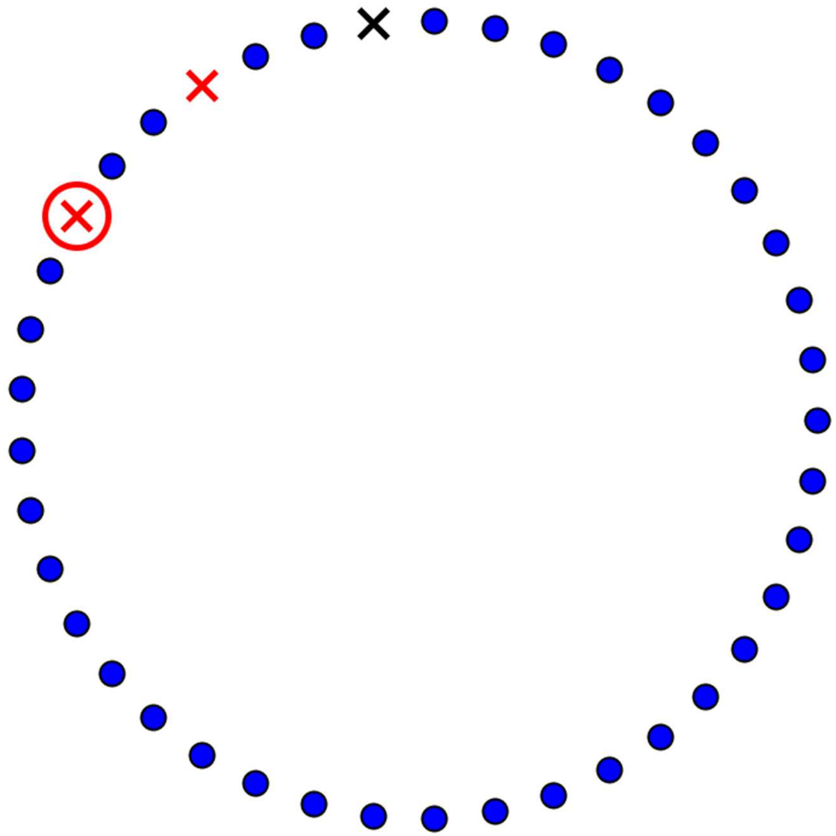
Le problème de Flavius Josèphe



Le problème de Flavius Josèphe

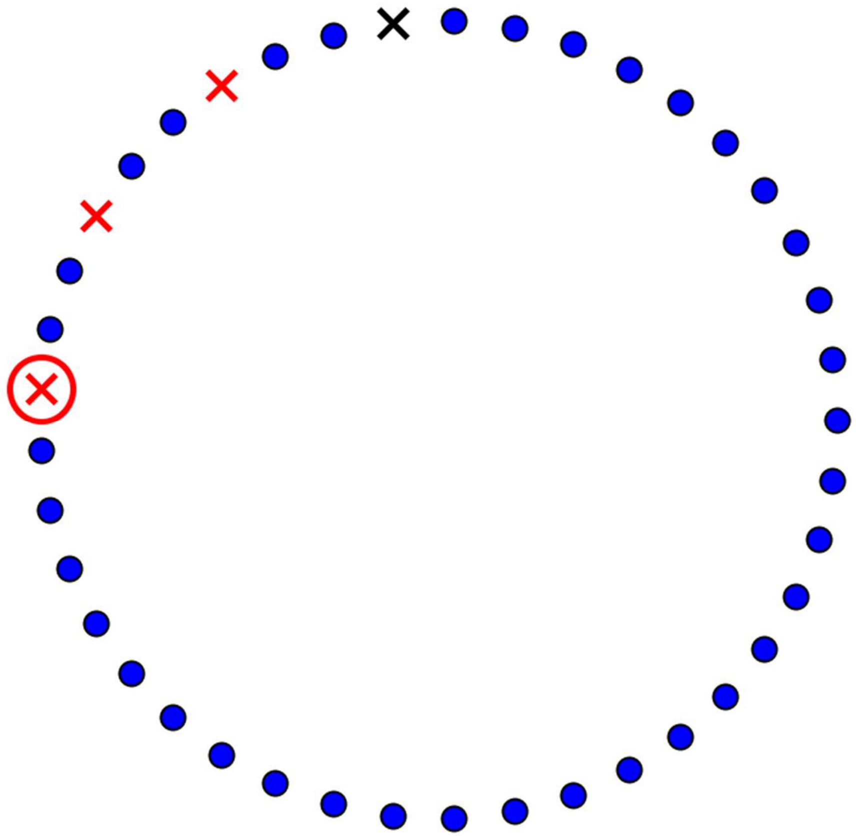


Le problème de Flavius Josèphe



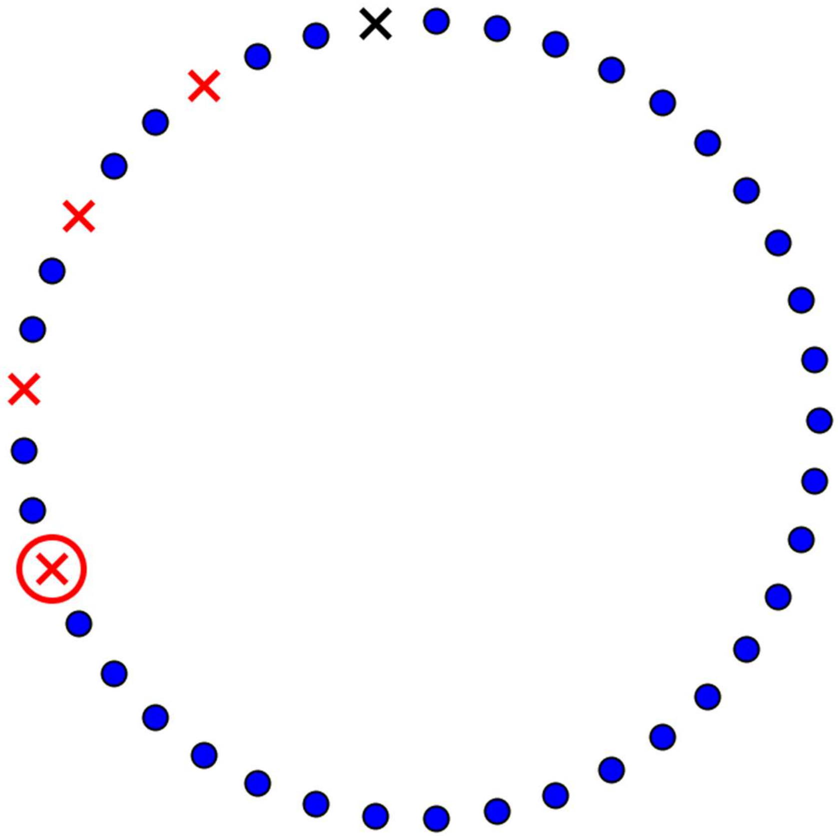
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



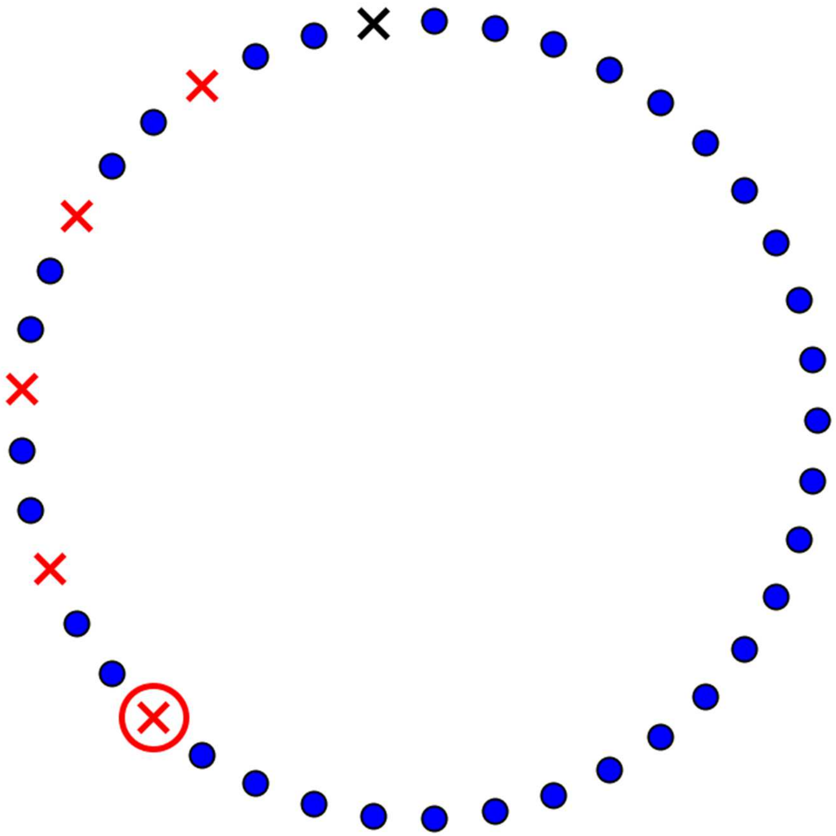
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



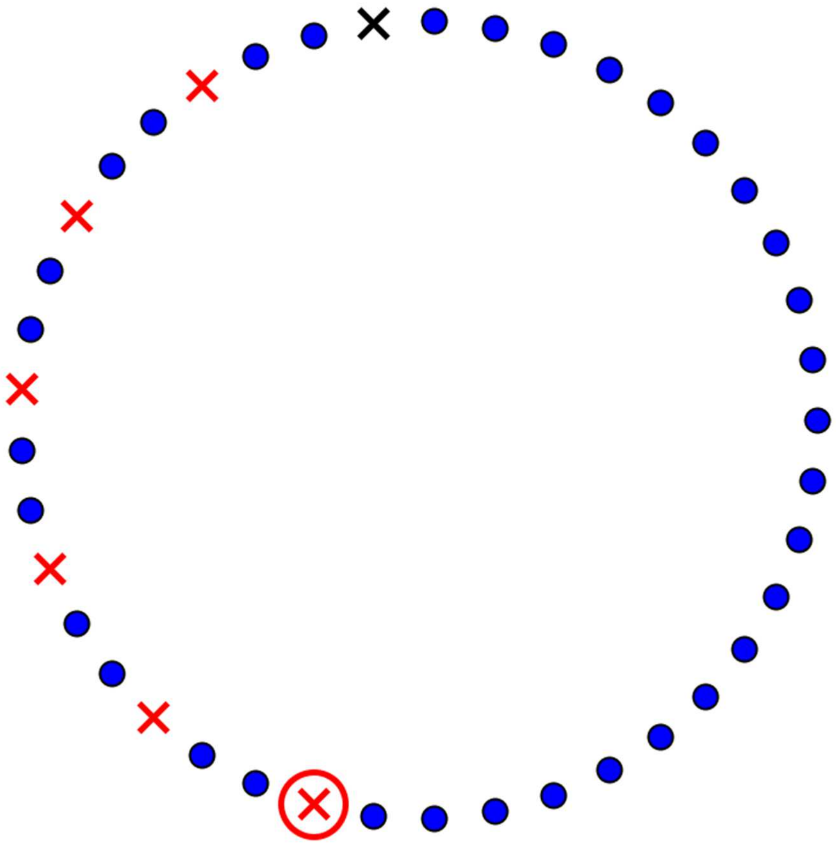
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



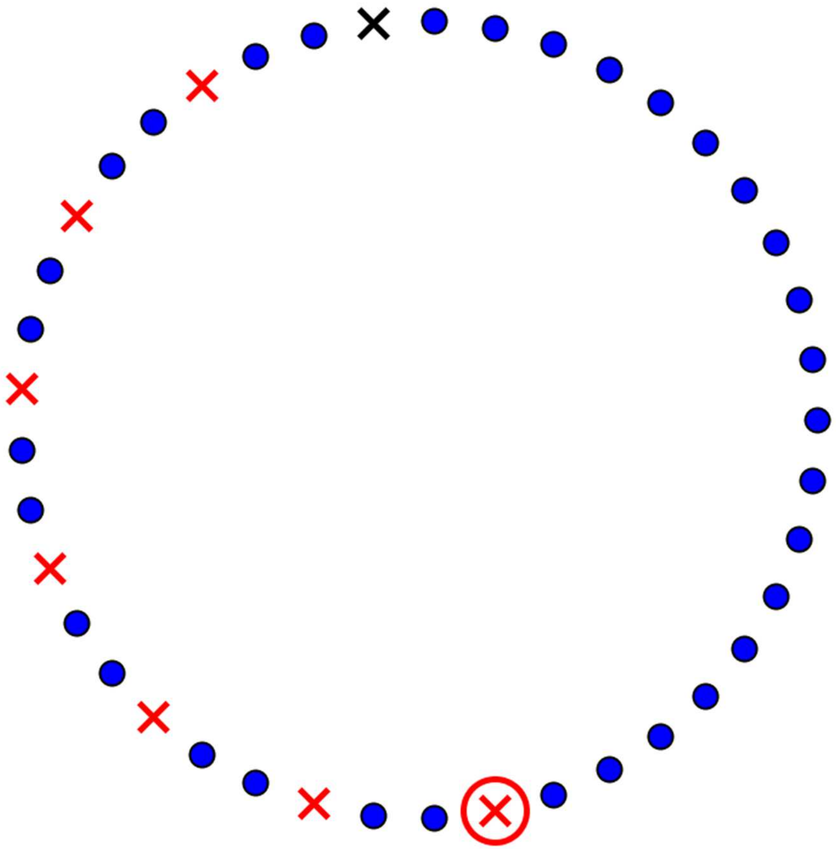
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



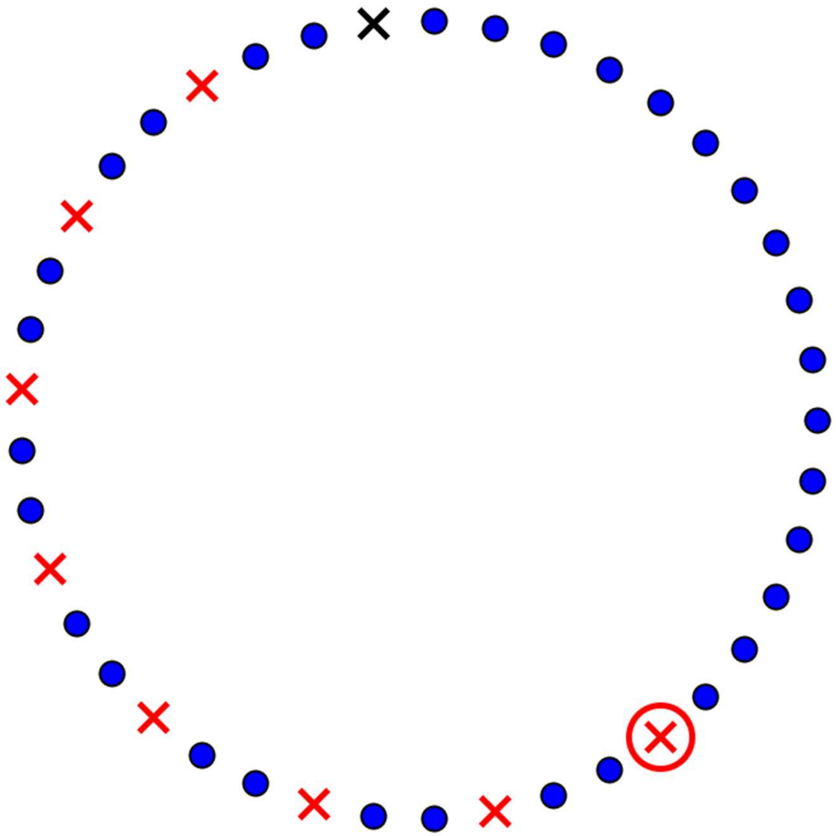
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



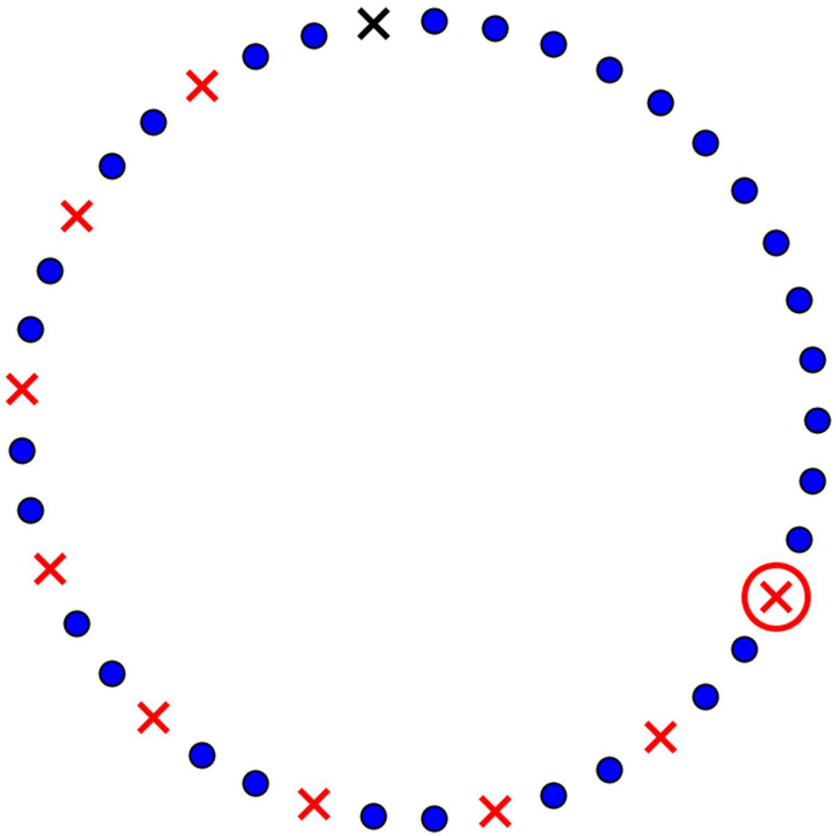
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



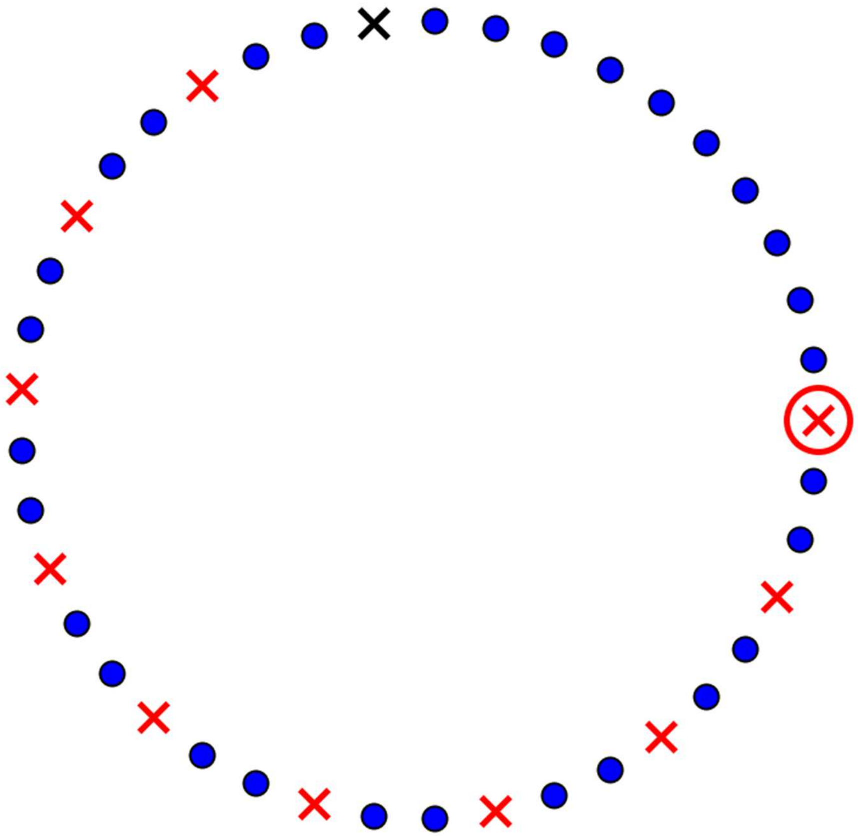
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



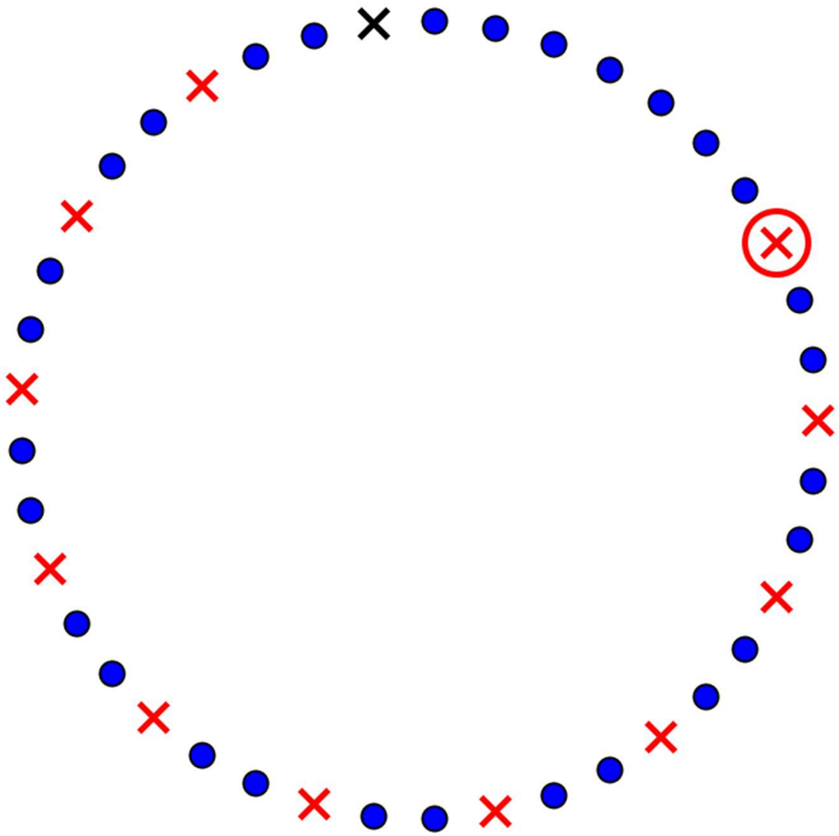
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



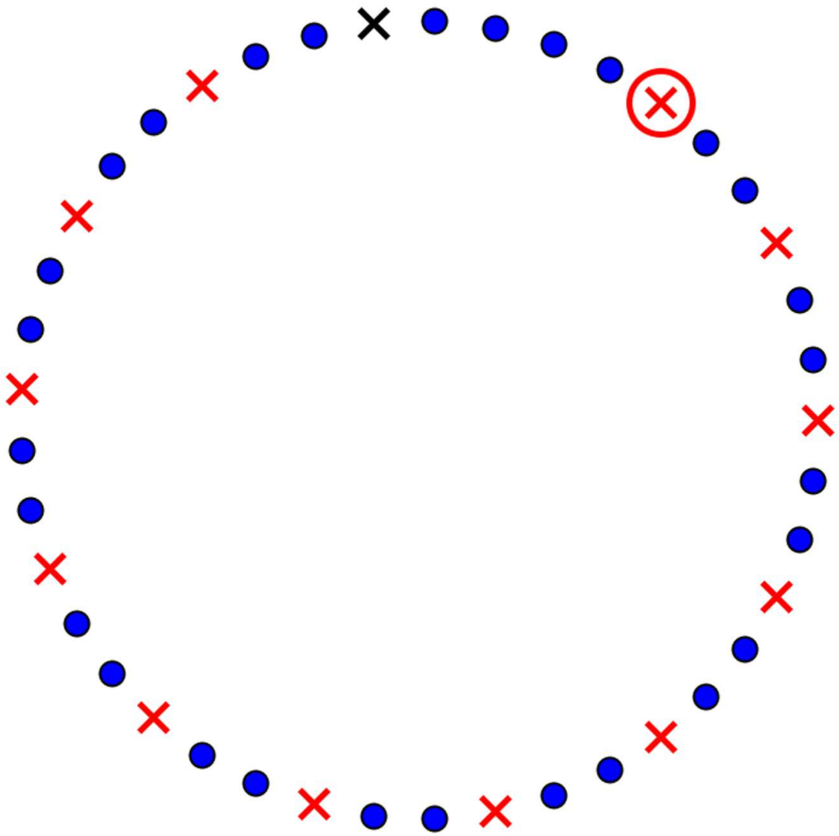
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



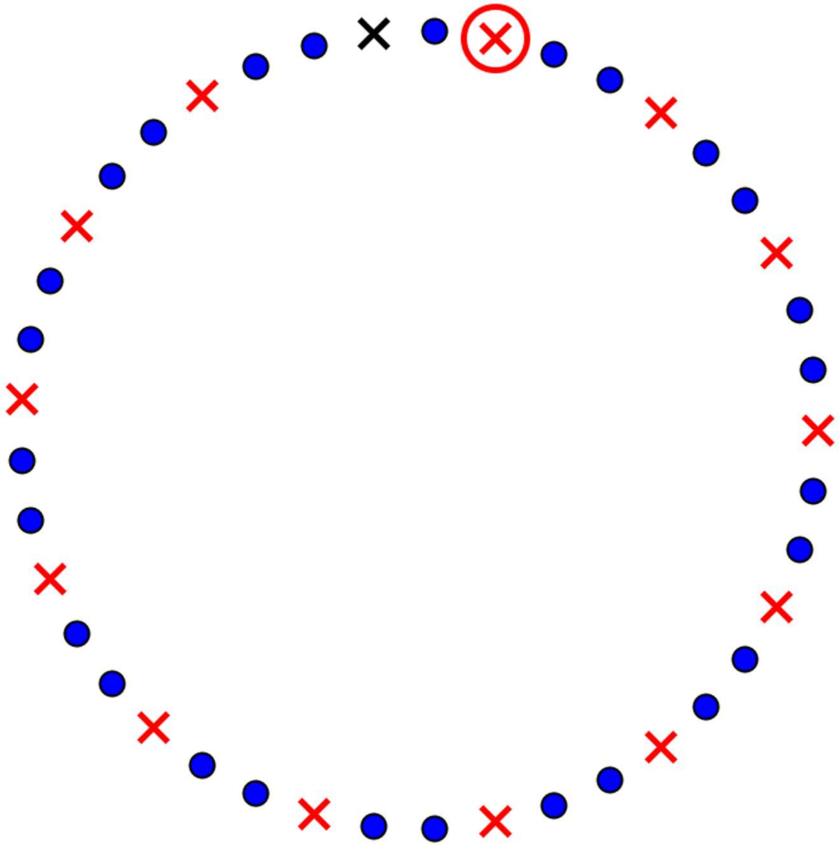
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



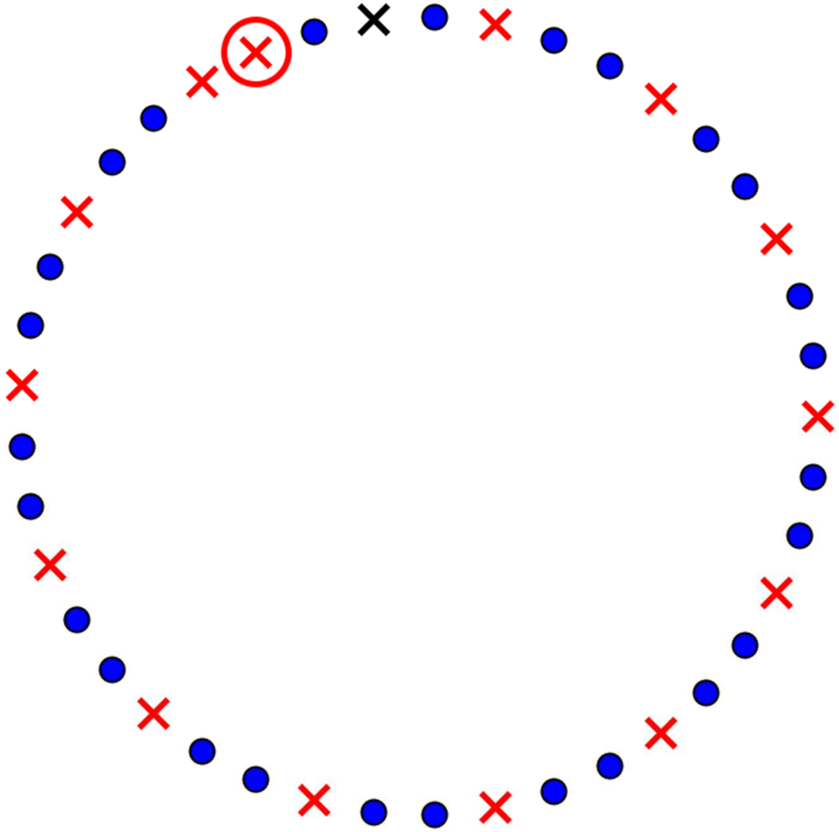
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



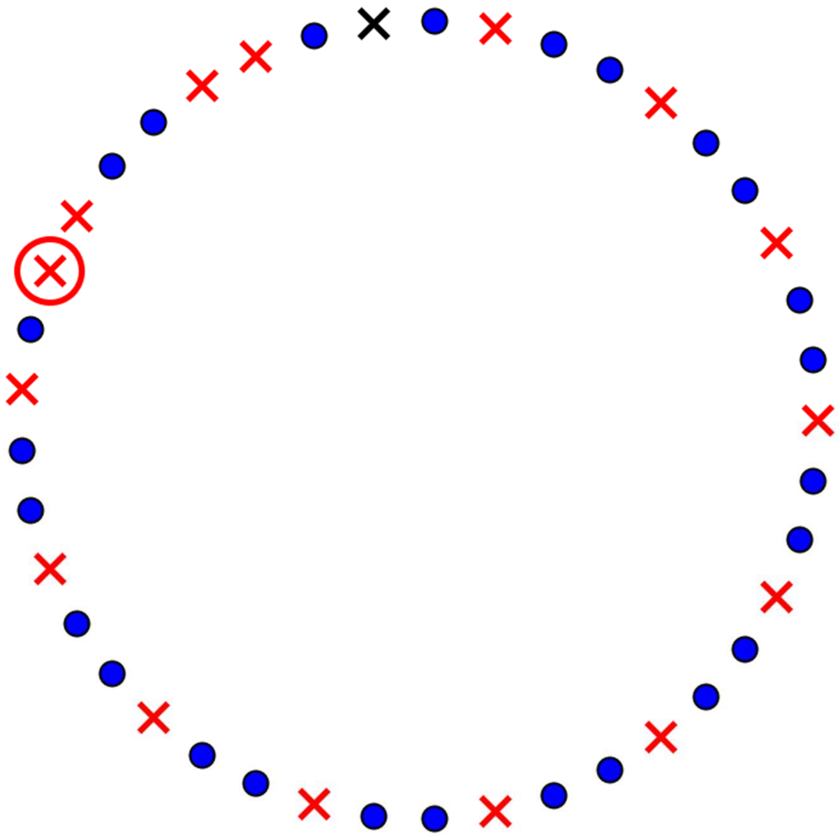
On tourne toujours dans le même sens.

Le problème de Flavius Josèphe



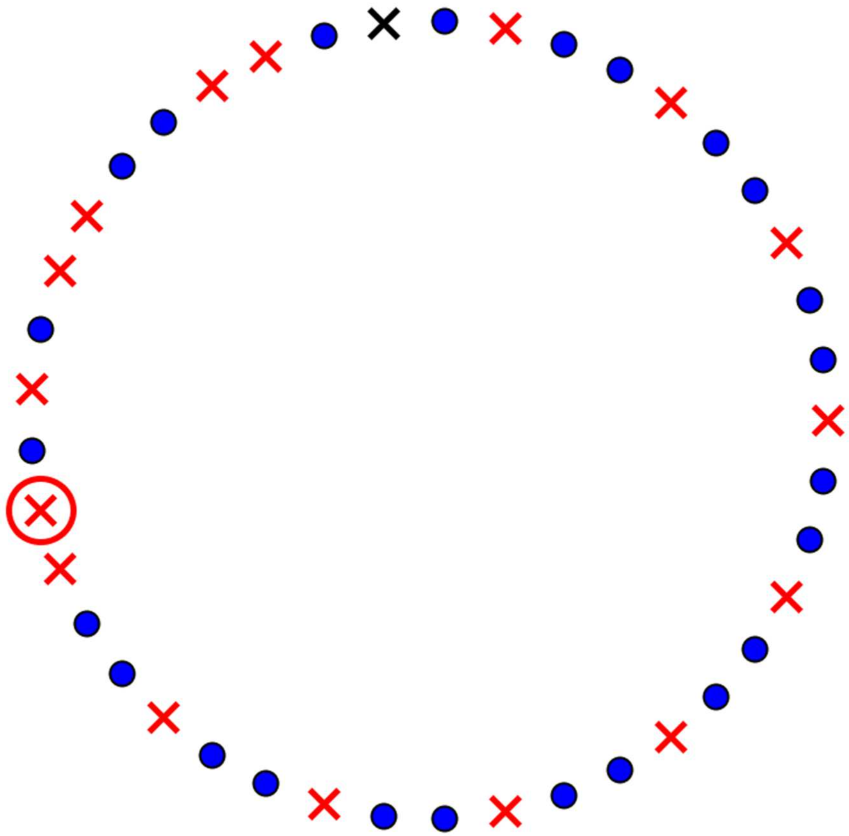
On tourne toujours dans le même sens.
On ne recompte pas les soldats déjà morts.

Le problème de Flavius Josèphe



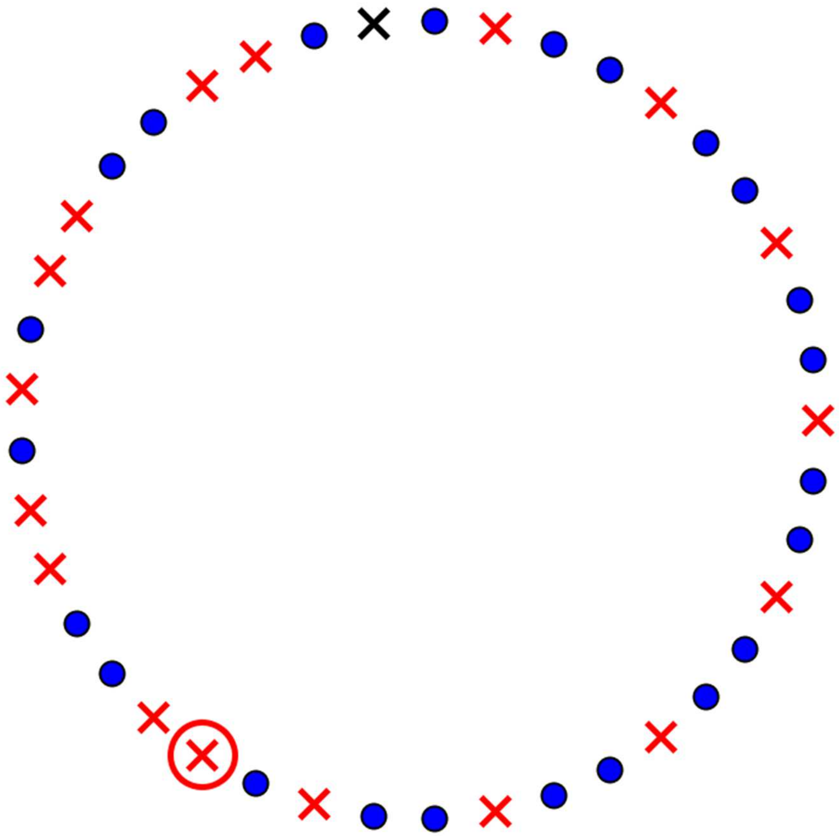
On tourne toujours dans le même sens.
On ne recompte pas les soldats déjà morts.

Le problème de Flavius Josèphe



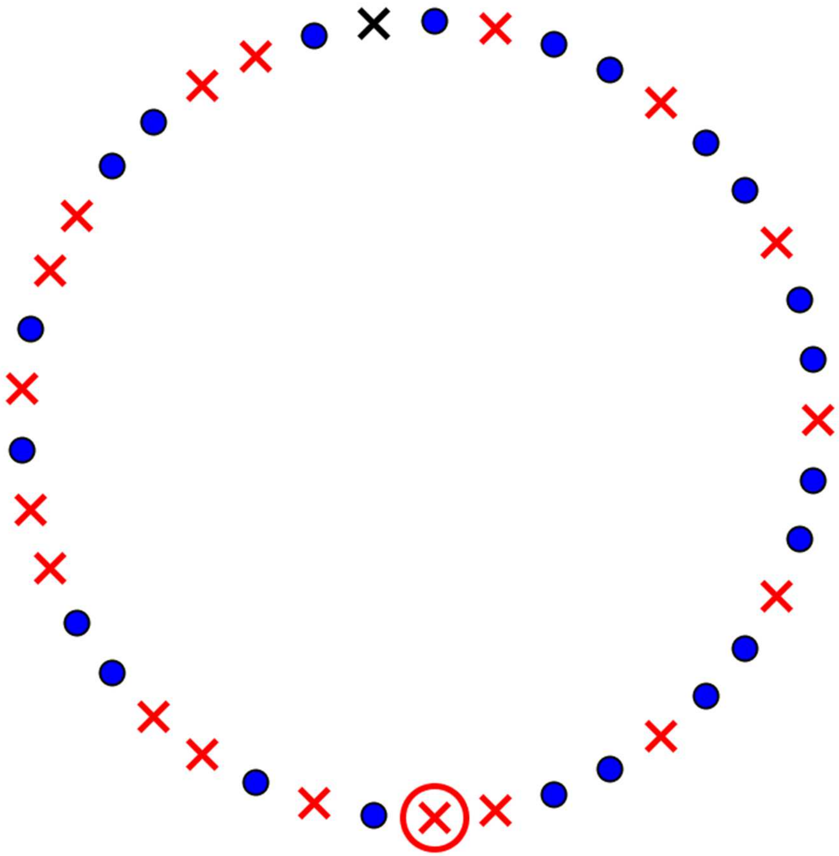
Où Flavius Josèphe était-il placé
pour être le seul survivant ?

Le problème de Flavius Josèphe



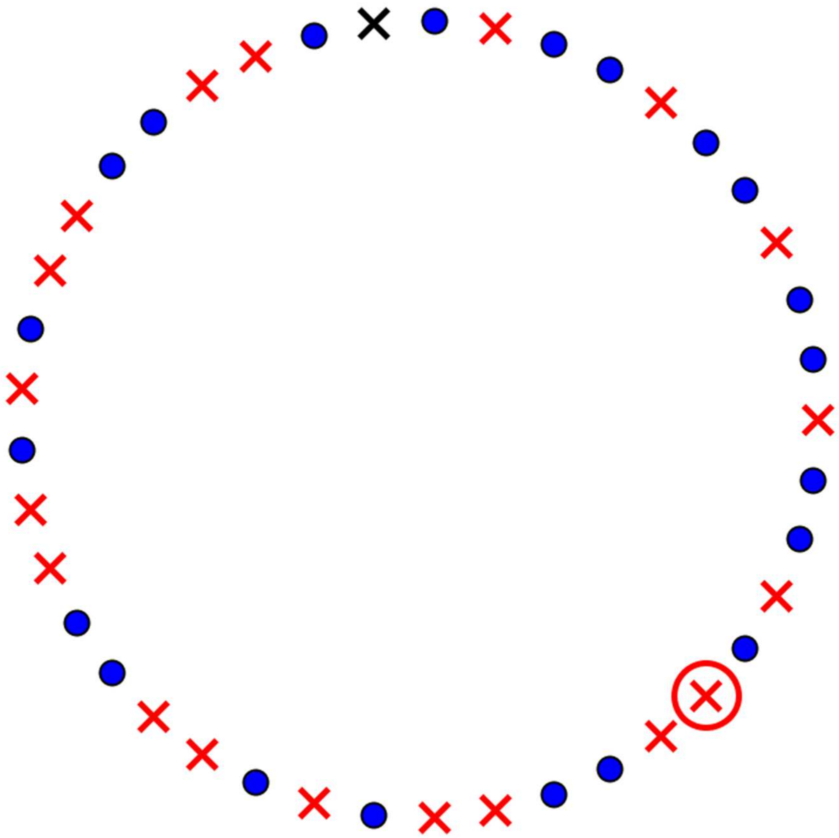
Où Flavius Josèphe était-il placé
pour être le seul survivant ?

Le problème de Flavius Josèphe



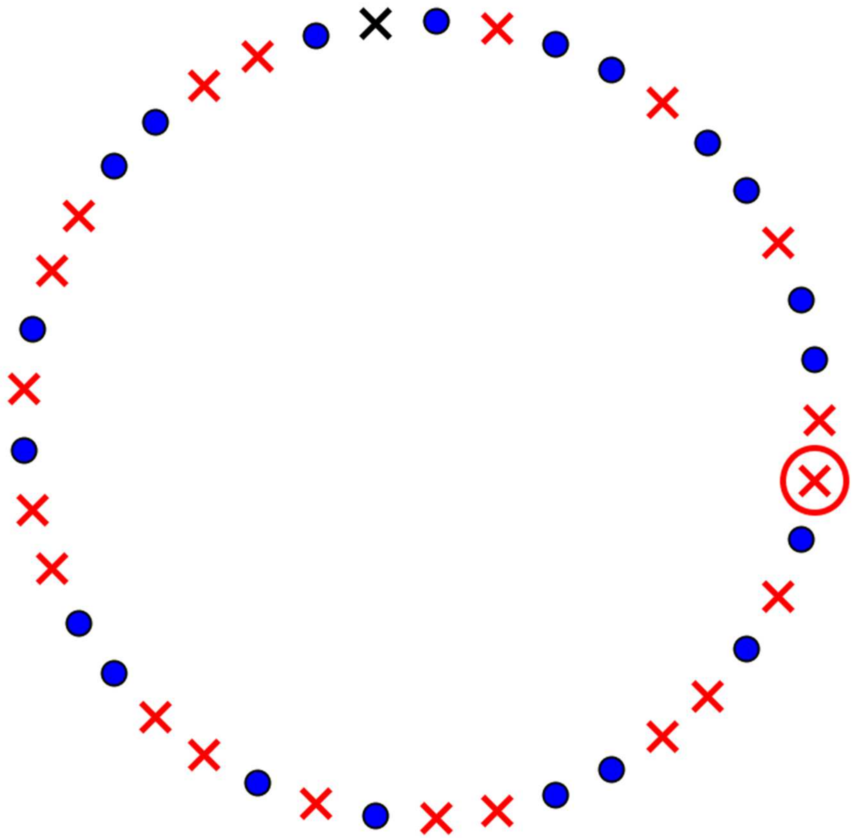
Où Flavius Josèphe était-il placé
pour être le seul survivant ?

Le problème de Flavius Josèphe



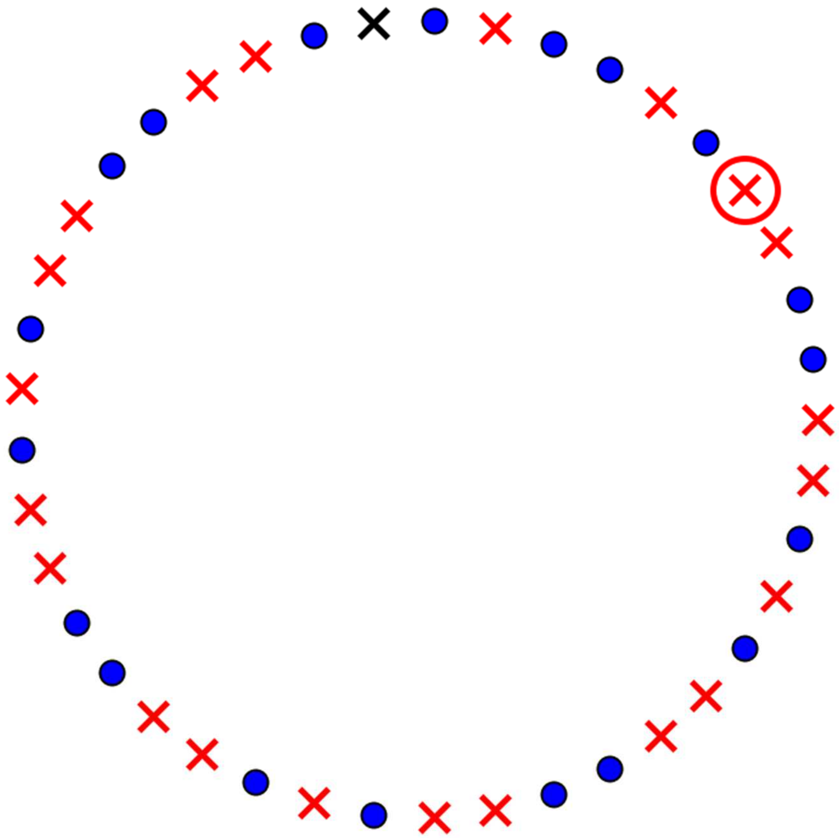
Où Flavius Josèphe était-il placé
pour être le seul survivant ?

Le problème de Flavius Josèphe



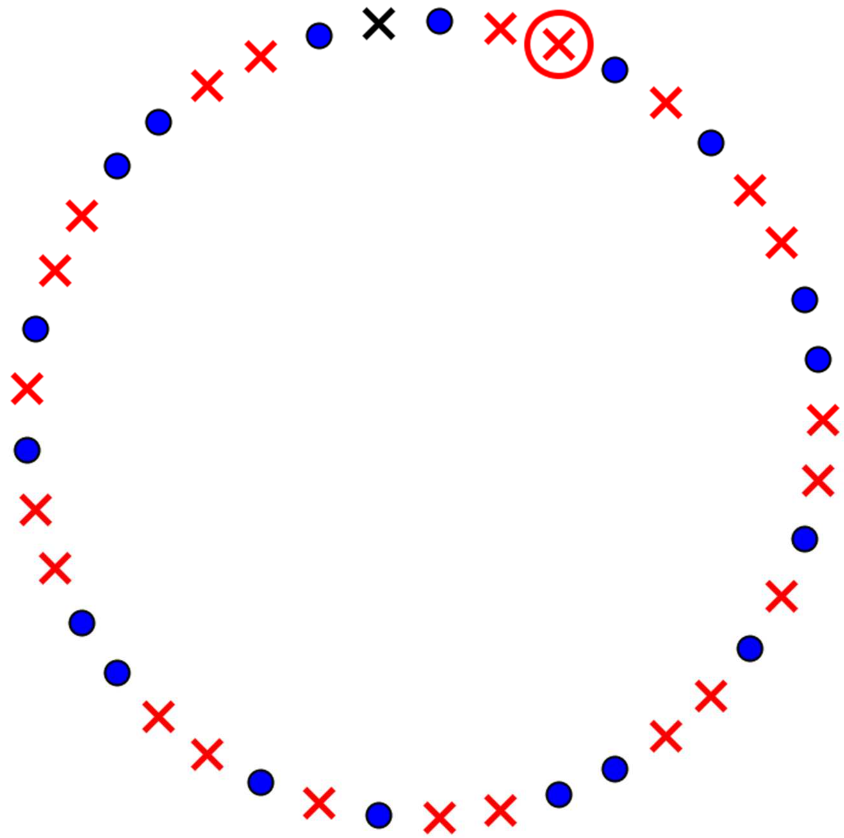
Où Flavius Josèphe était-il placé
pour être le seul survivant ?

Le problème de Flavius Josèphe



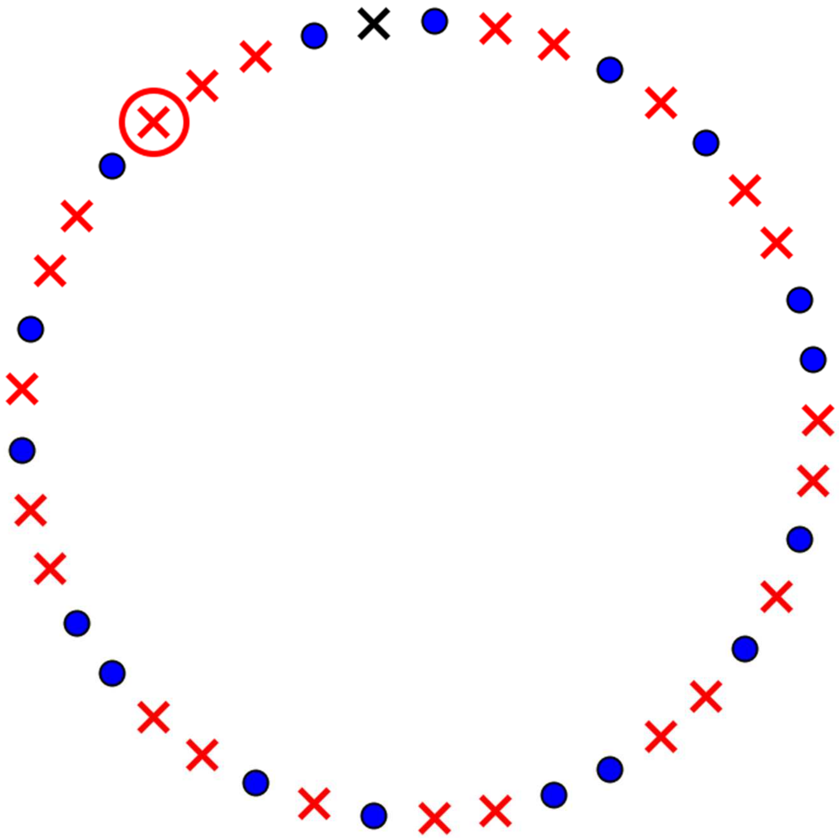
Où Flavius Josèphe était-il placé
pour être le seul survivant ?

Le problème de Flavius Josèphe



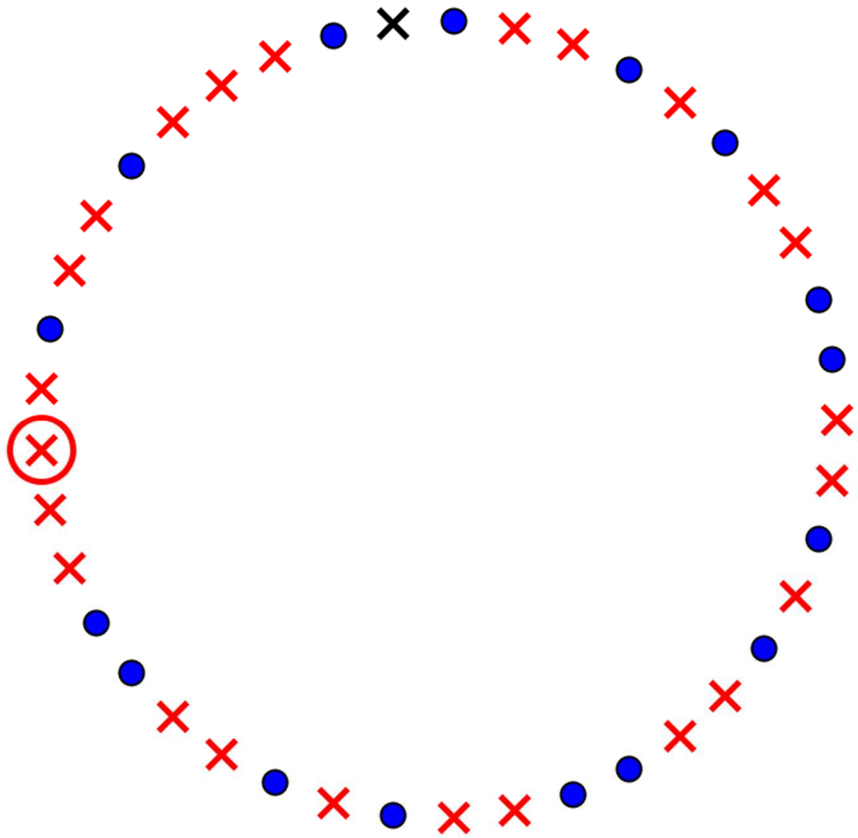
Où Flavius Josèphe était-il placé
pour être le seul survivant ?

Le problème de Flavius Josèphe



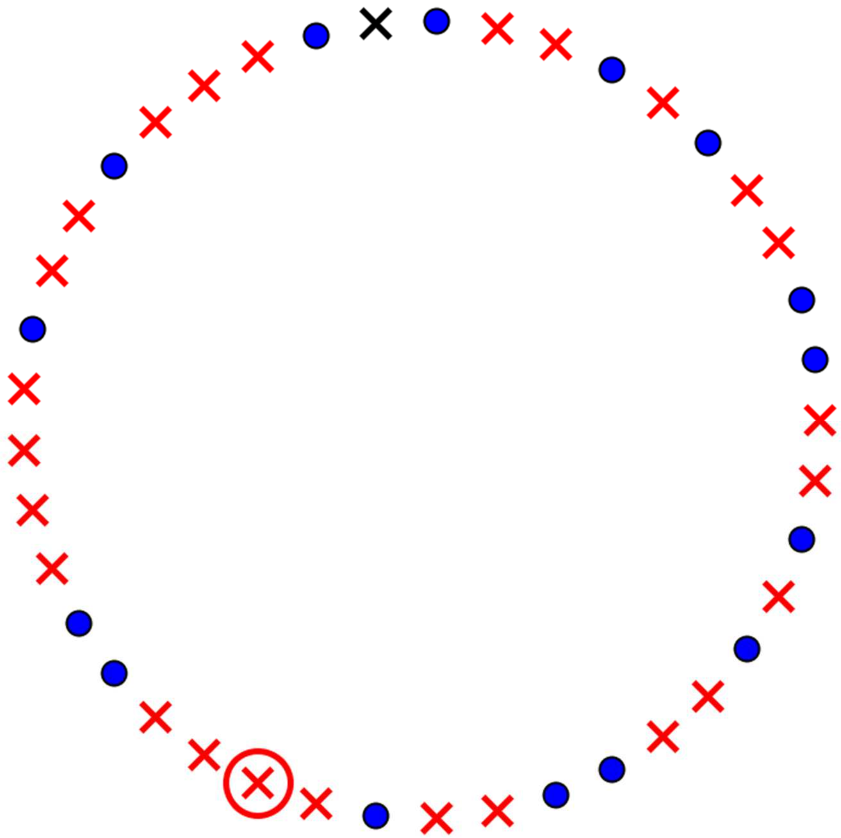
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



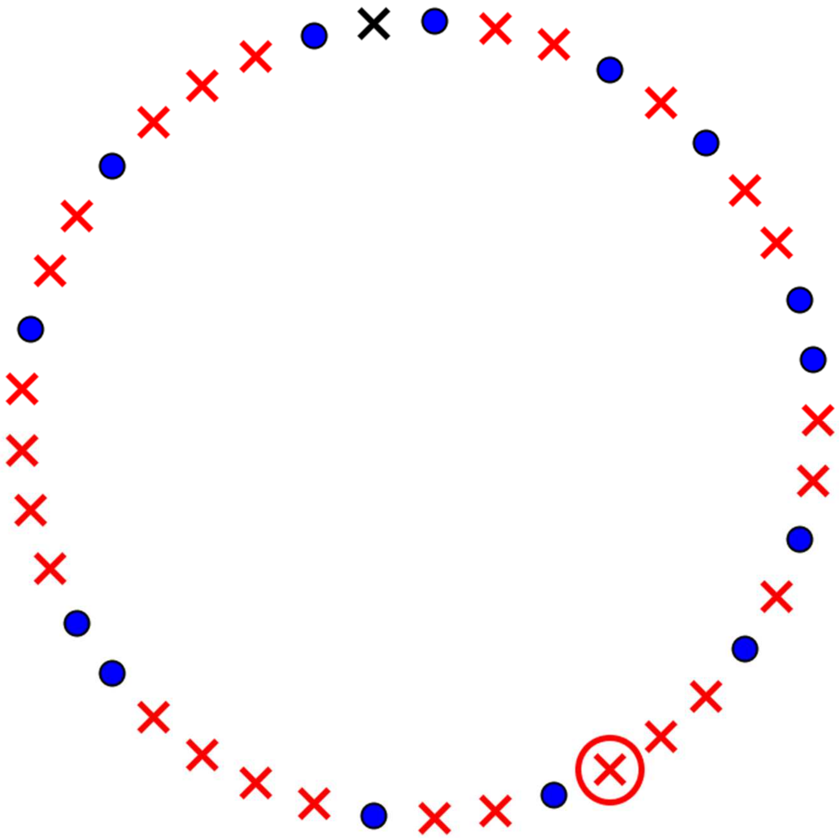
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



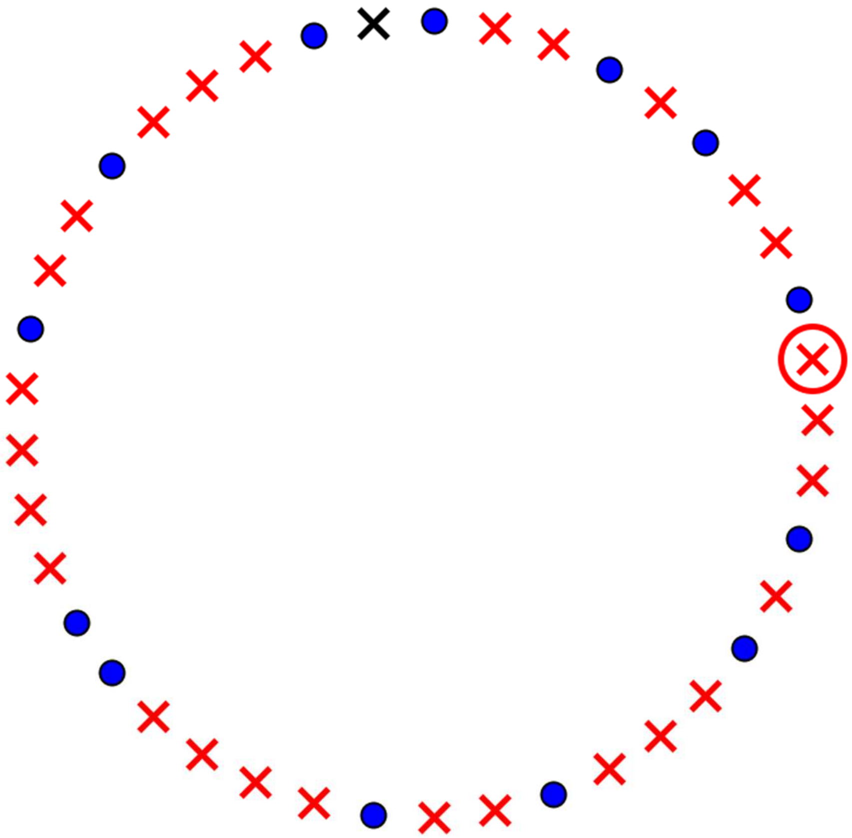
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



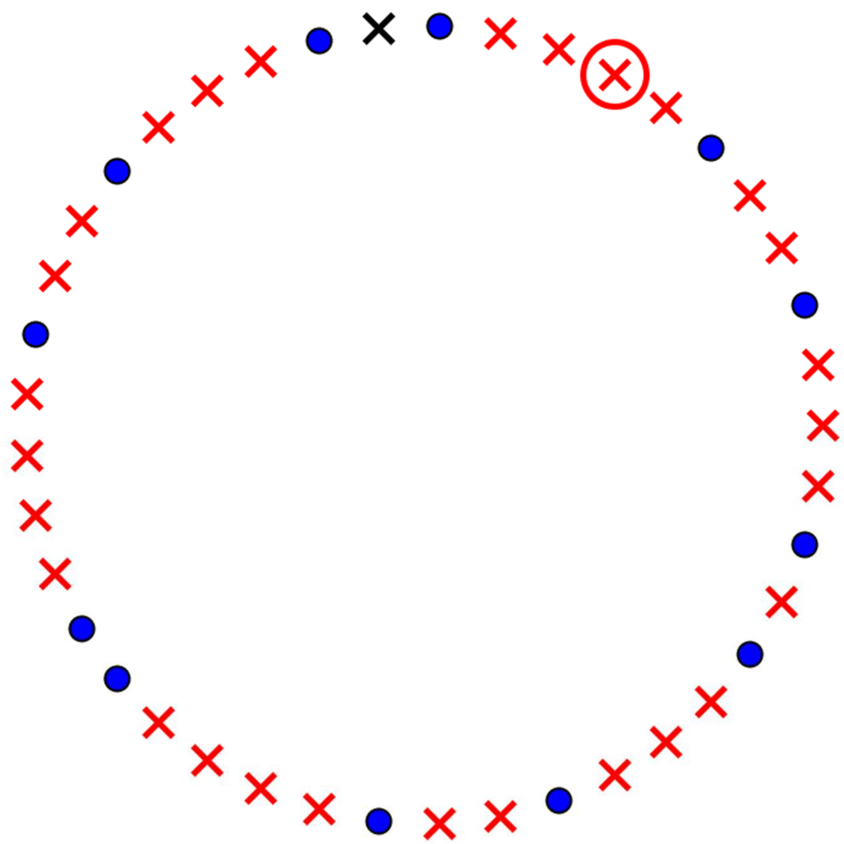
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



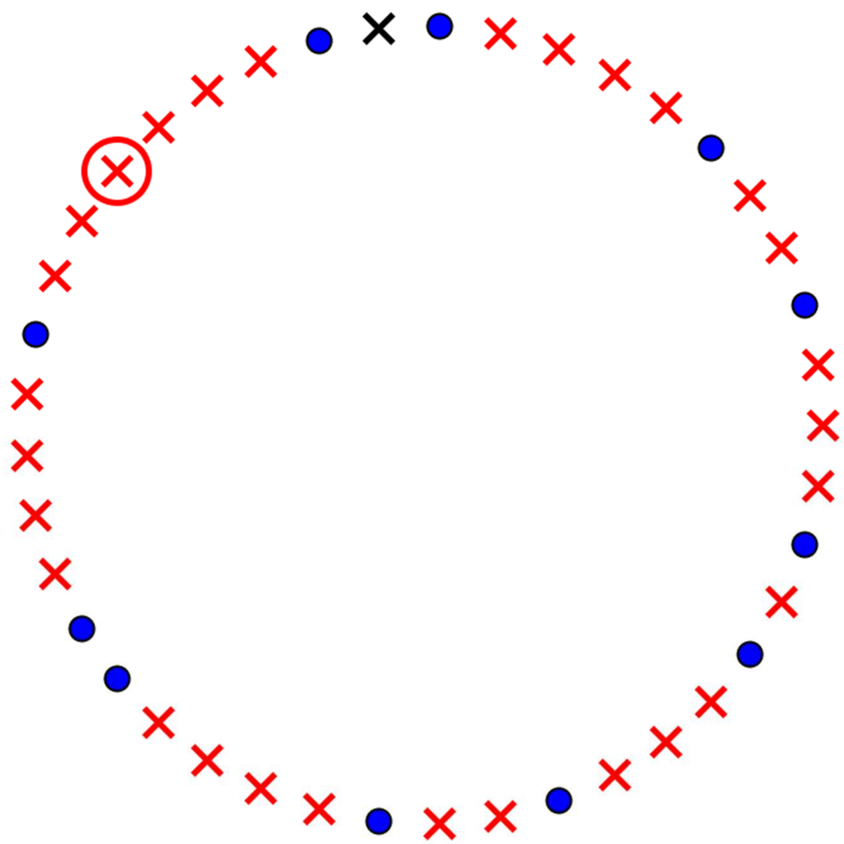
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



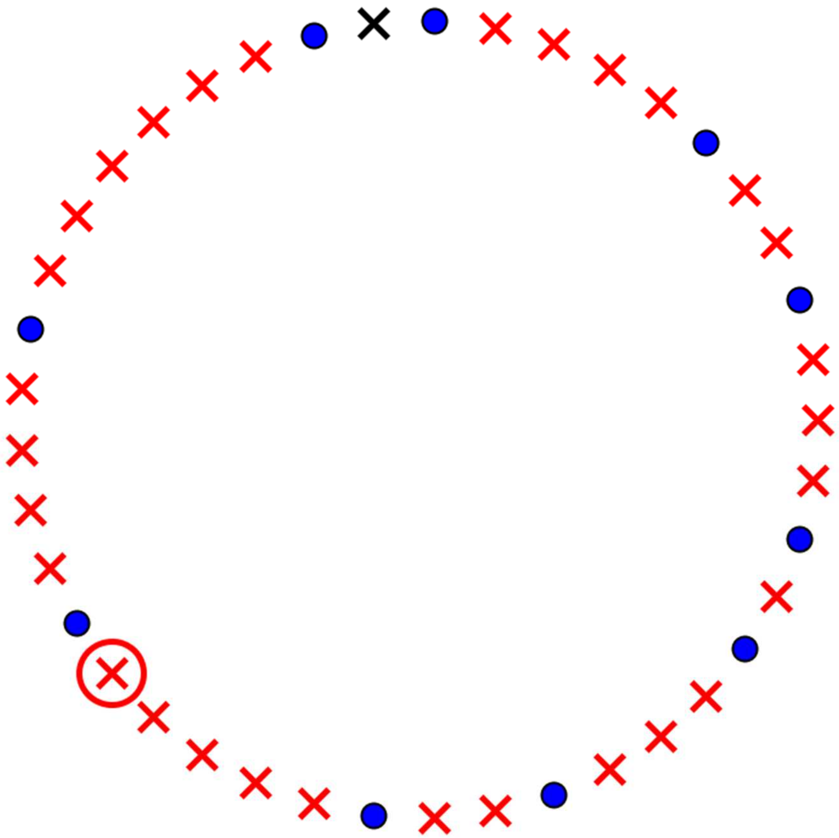
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



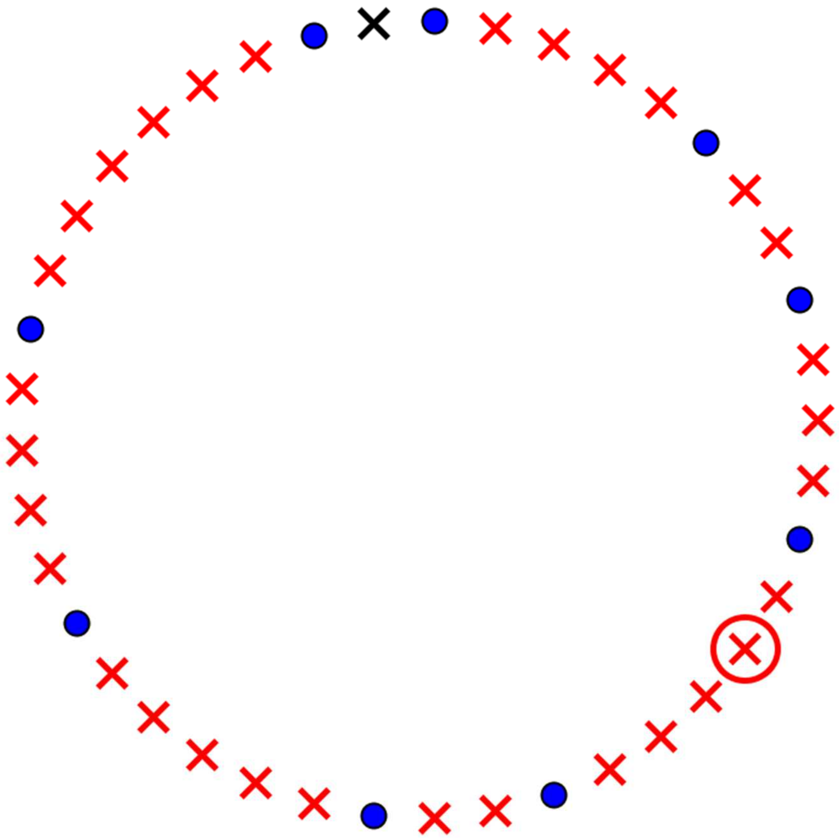
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



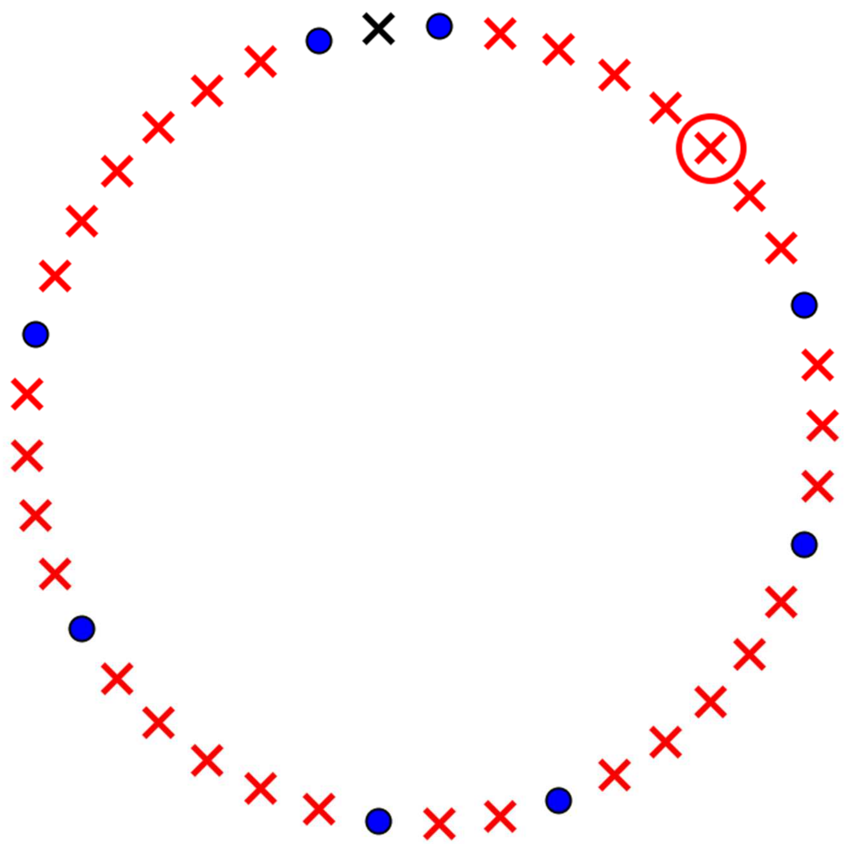
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



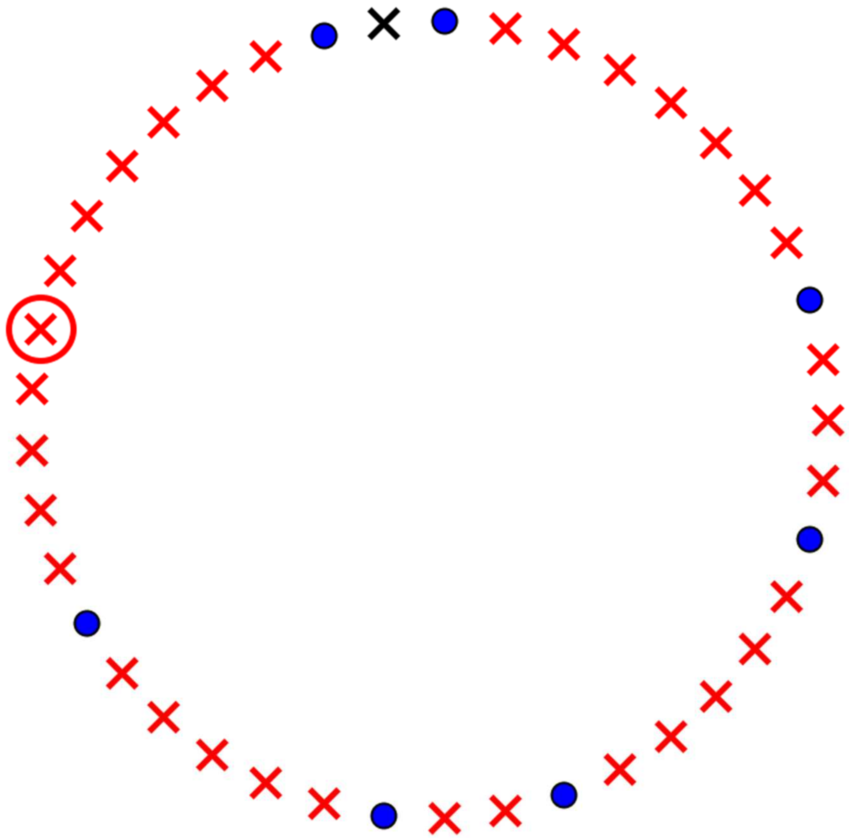
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



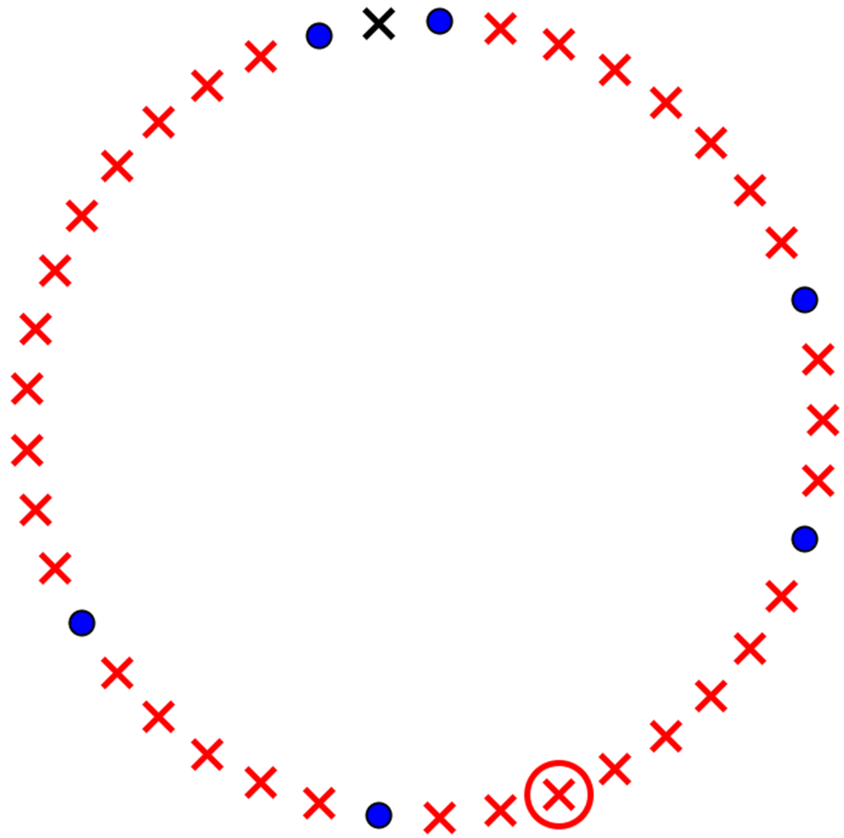
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



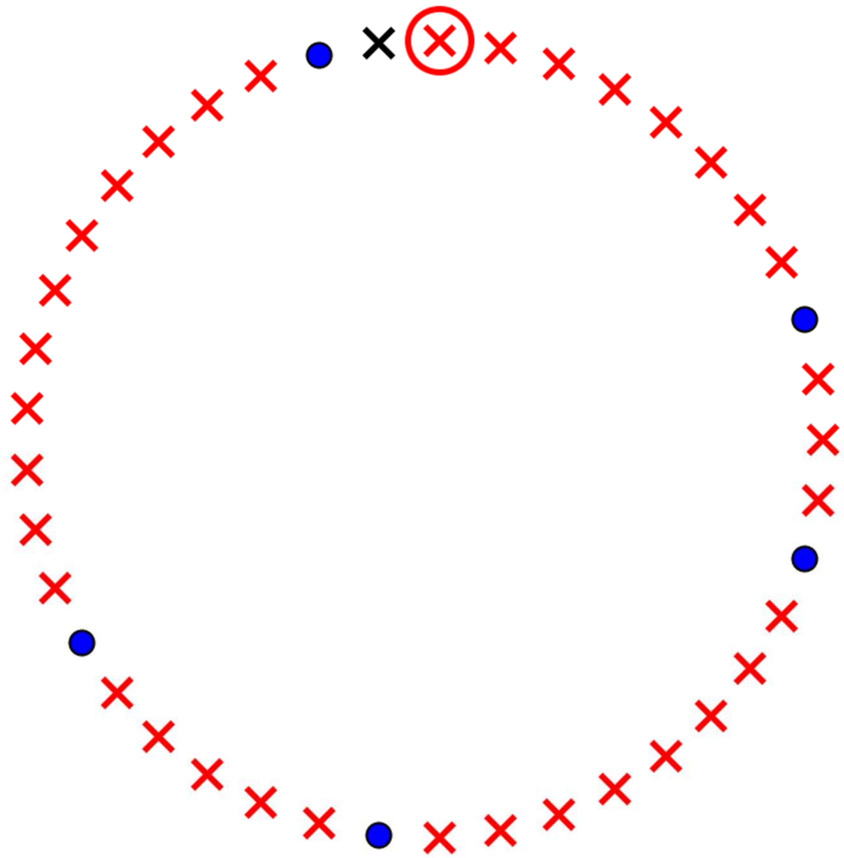
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



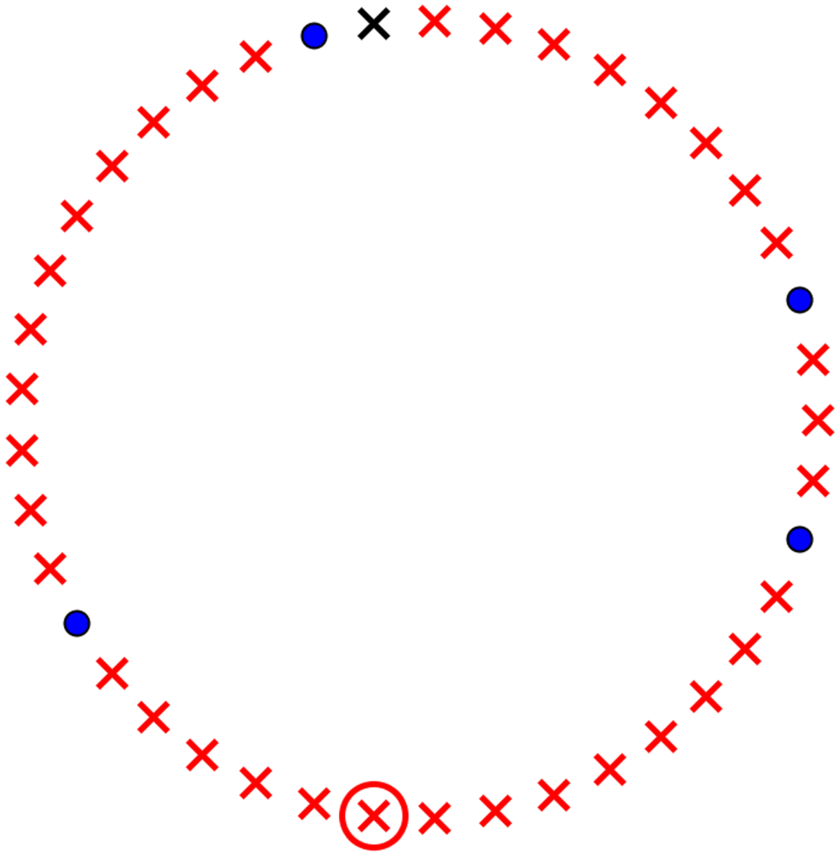
On continue le massacre…

Le problème de Flavius Josèphe



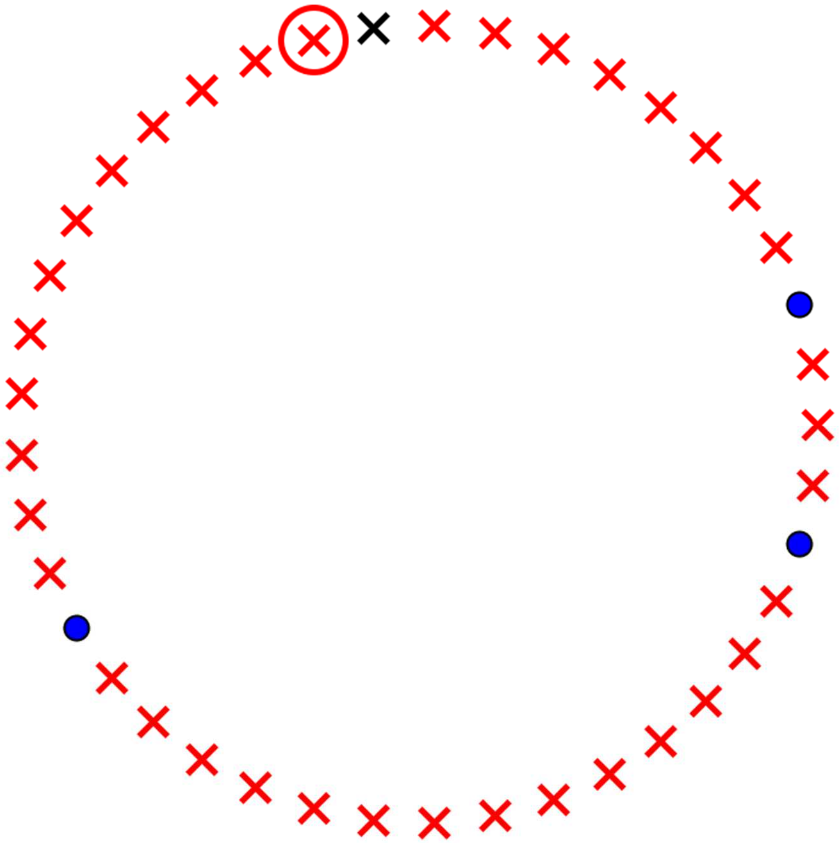
Plus que cinq…

Le problème de Flavius Josèphe



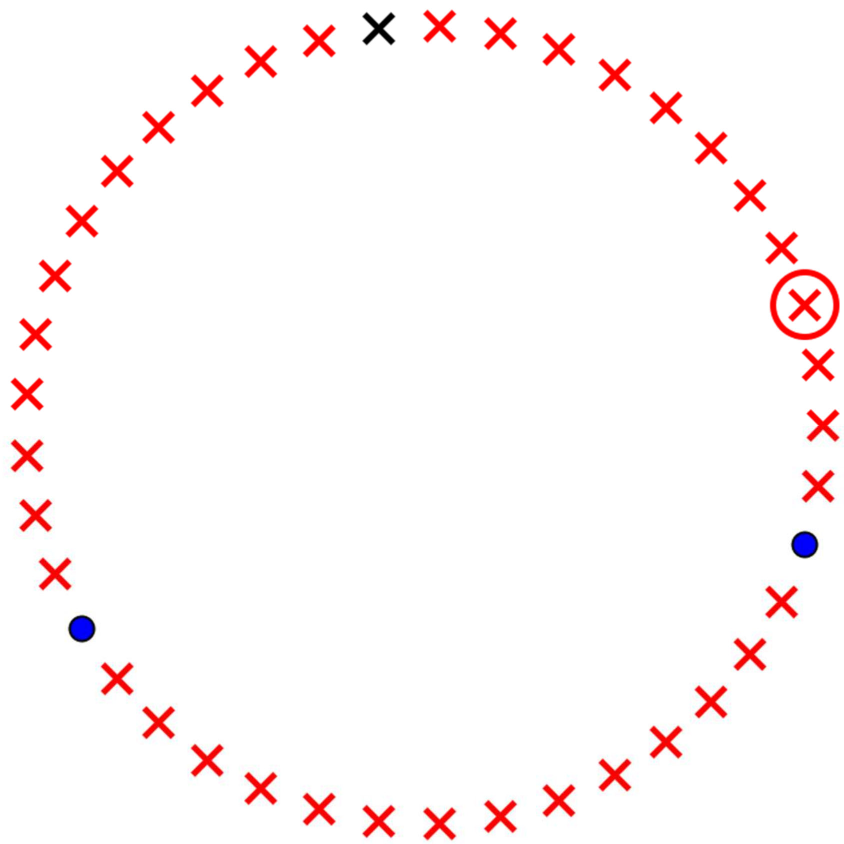
Quatre…

Le problème de Flavius Josèphe



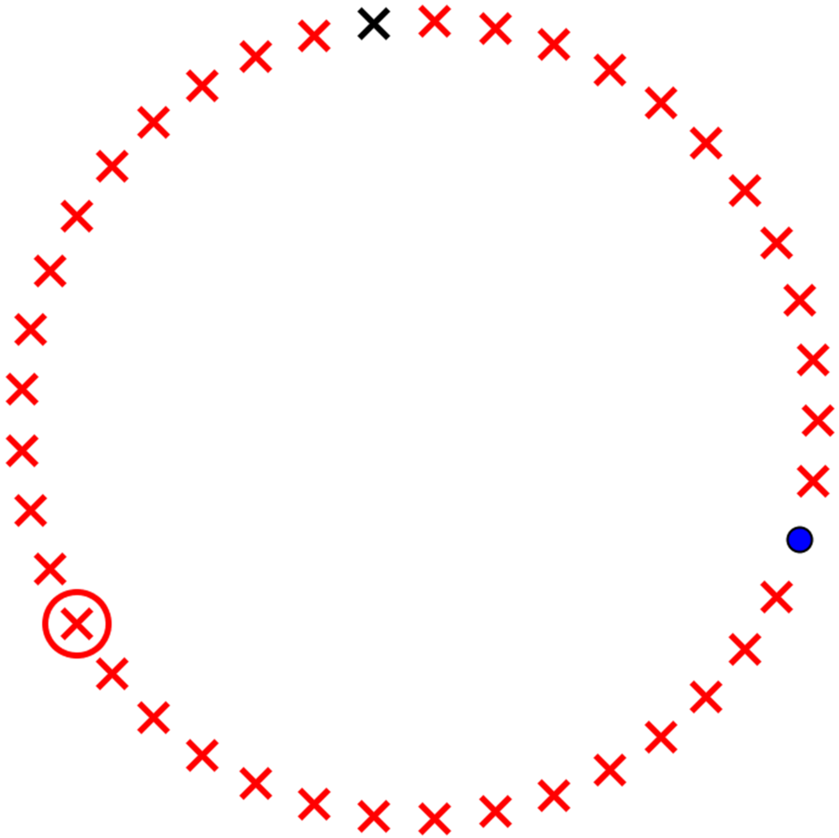
Trois…

Le problème de Flavius Josèphe



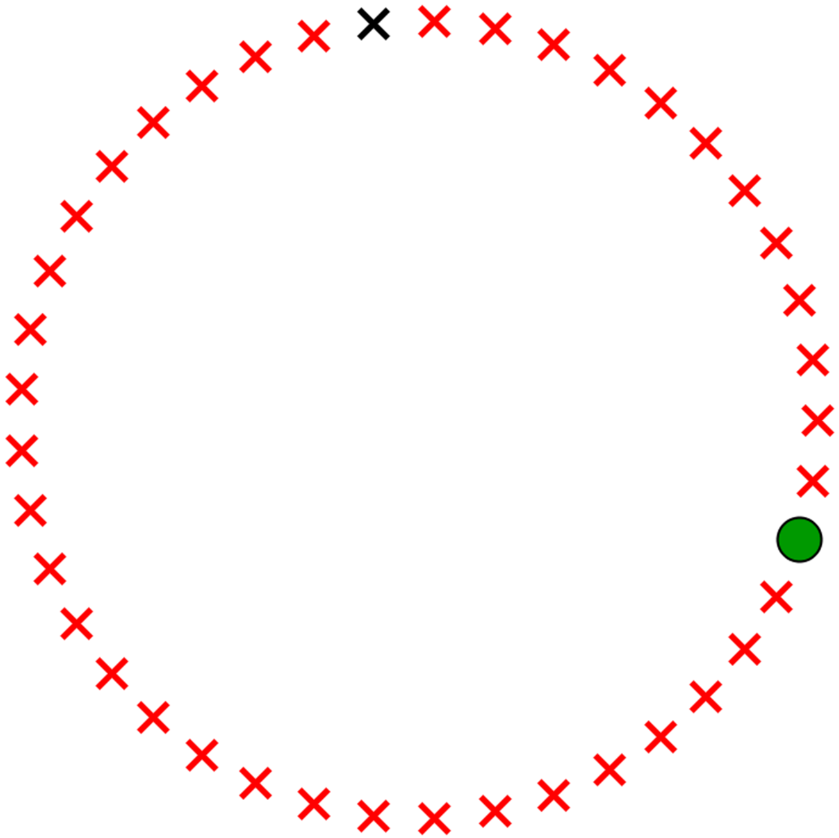
Deux…

Le problème de Flavius Josèphe



Un…

Le problème de Flavius Josèphe



Il était là !

Le problème de Flavius Josèphe

Connaissant le nombre n de soldats,
comment déterminer
le numéro du survivant ?

Le cas « un sur deux »

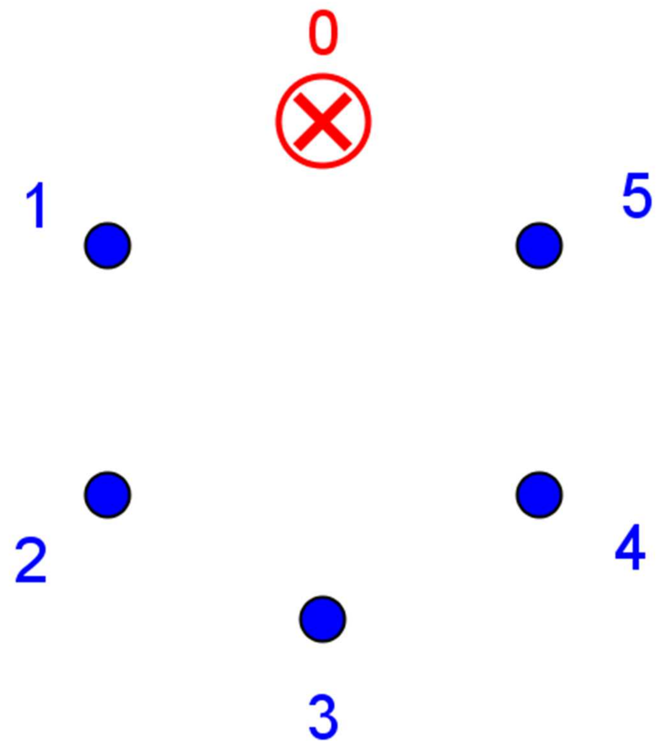
Pour simplifier,
on traite le cas où on élimine
un soldat sur deux
au lieu d'un sur trois.

On note n le nombre de soldats.
On les numérote de 0 jusqu'à $n - 1$.

On note u_n le numéro du survivant.

Le cas « un sur deux »

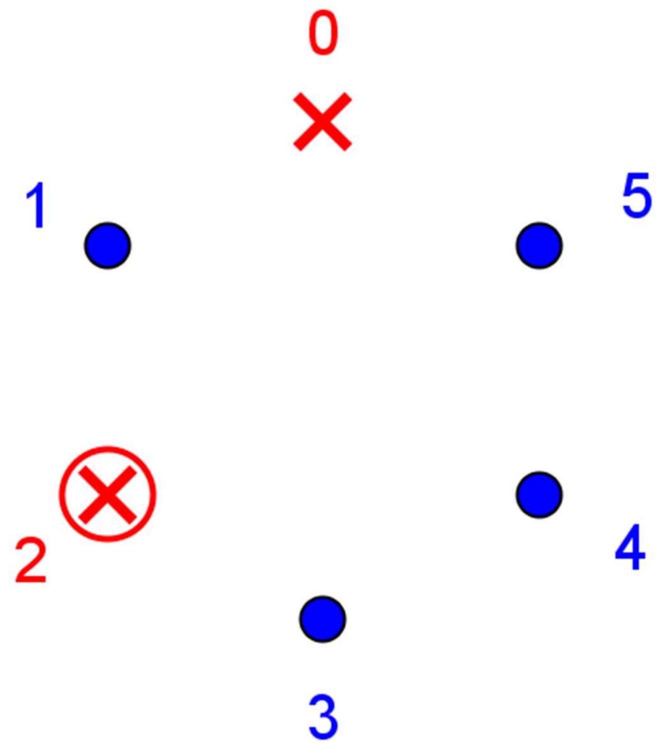
Exemple avec $n = 6$:



Qui sera le survivant ?

Le cas « un sur deux »

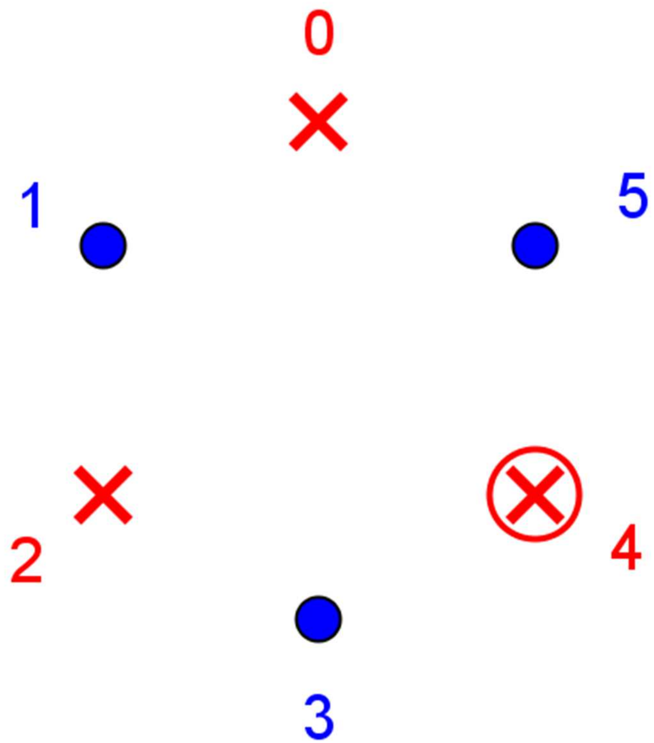
Exemple avec $n = 6$:



C'est parti !

Le cas « un sur deux »

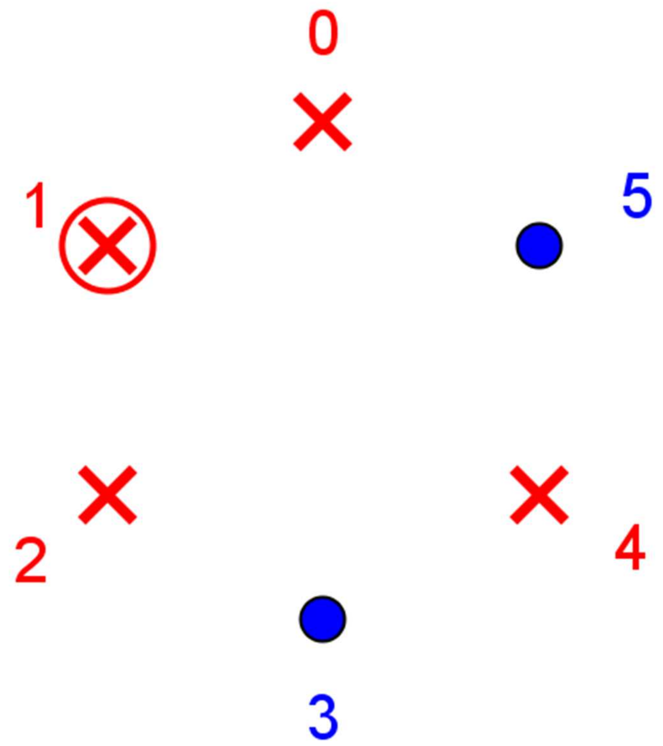
Exemple avec $n = 6$:



Plus que trois…

Le cas « un sur deux »

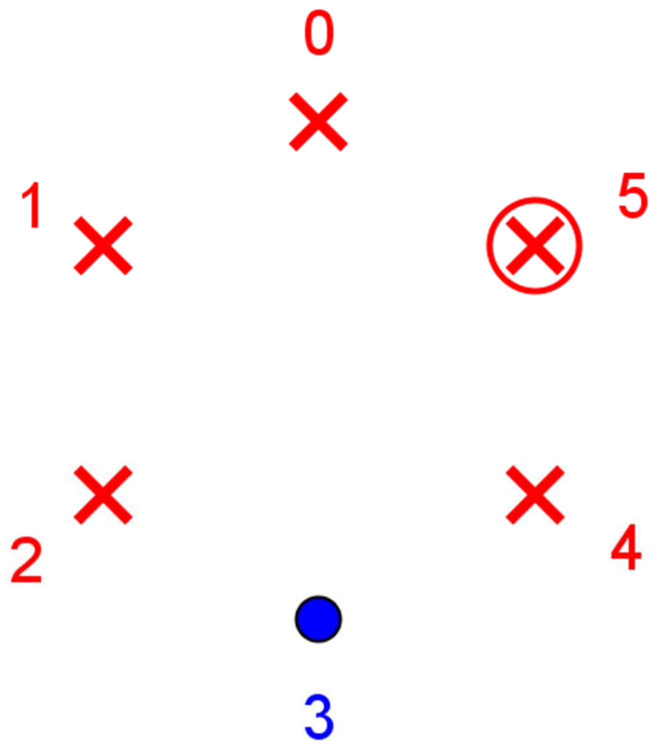
Exemple avec $n = 6$:



Plus que deux…

Le cas « un sur deux »

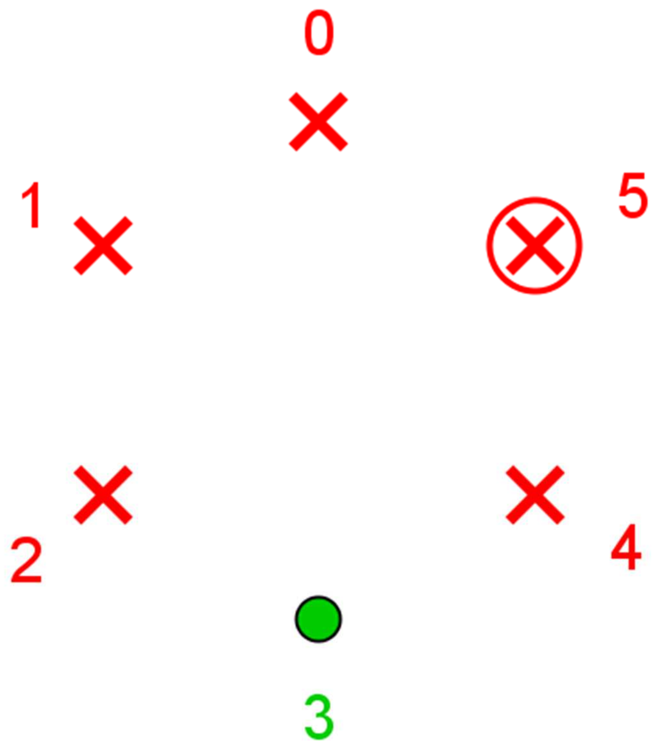
Exemple avec $n = 6$:



Plus qu'un !

Le cas « un sur deux »

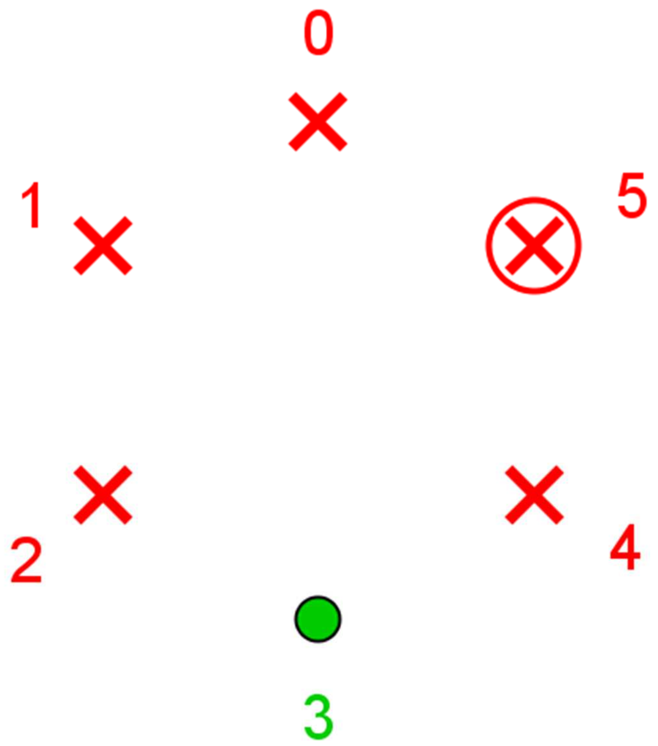
Exemple avec $n = 6$:



Pour 6 soldats, le survivant est le numéro 3.

Le cas « un sur deux »

Exemple avec $n = 6$:



On a donc $u_6 = 3$.

Le cas « un sur deux »

Voici les premiers résultats obtenus à la main.

n	u_n
1	0
2	1
3	1
4	3
5	1
6	3
7	5
8	7
9	1
10	3
11	5
12	7
13	9
14	11
15	13
16	15

n	u_n
17	1
18	3
19	5
20	7
21	9
22	11
23	13
24	15
25	17
26	19
27	21
28	23
29	25
30	27
31	29
32	31

Le cas « un sur deux » : remarques

• On remarque que les résultats sont :
1,
1, 3,
1, 3, 5, 7,
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31,
etc.

• Tous les numéros pairs sont éliminés au premier tour donc u_n est toujours impair (sauf $u_1 = 0$).

Le cas « un sur deux » : remarques

- Pour les valeurs paires de n on a :

  $u_2 = 1 = 2\times0 + 1 = 2u_1 + 1$
  $u_4 = 3 = 2\times1 + 1 = 2u_2 + 1$
  $u_6 = 3 = 2\times1 + 1 = 2u_3 + 1$
  $u_8 = 7 = 2\times3 + 1 = 2u_4 + 1$
  $u_{10} = 3 = 2\times1 + 1 = 2u_5 + 1$
  etc.

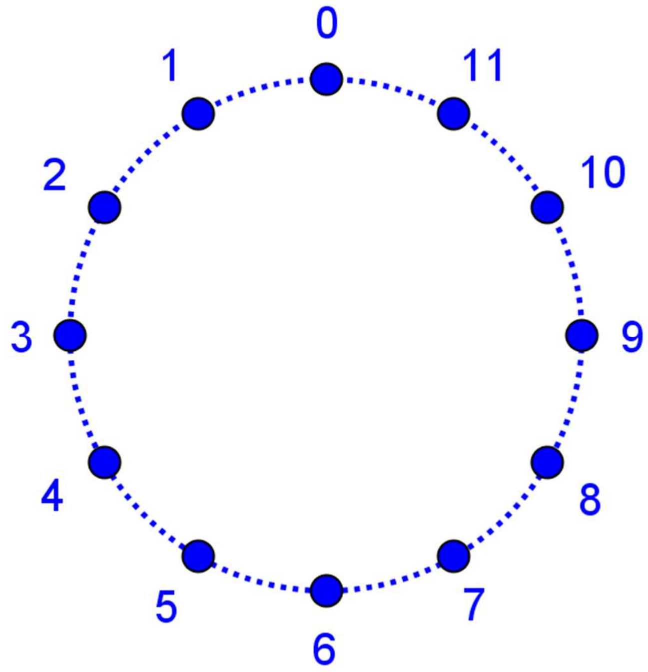
- On conjecture que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{2n} = 2u_n + 1.$$

Une démonstration

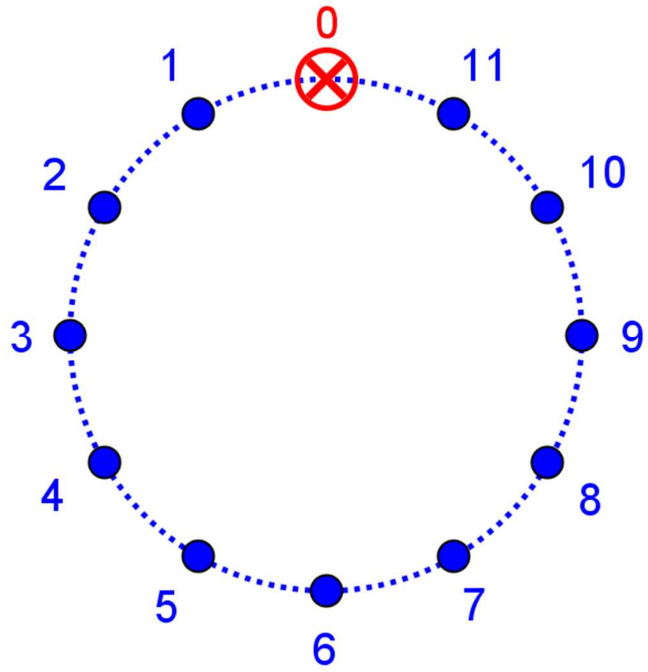
On veut démontrer que $u_{2n} = 2u_n + 1$.

On considère un grand cercle contenant $2n$ personnes.



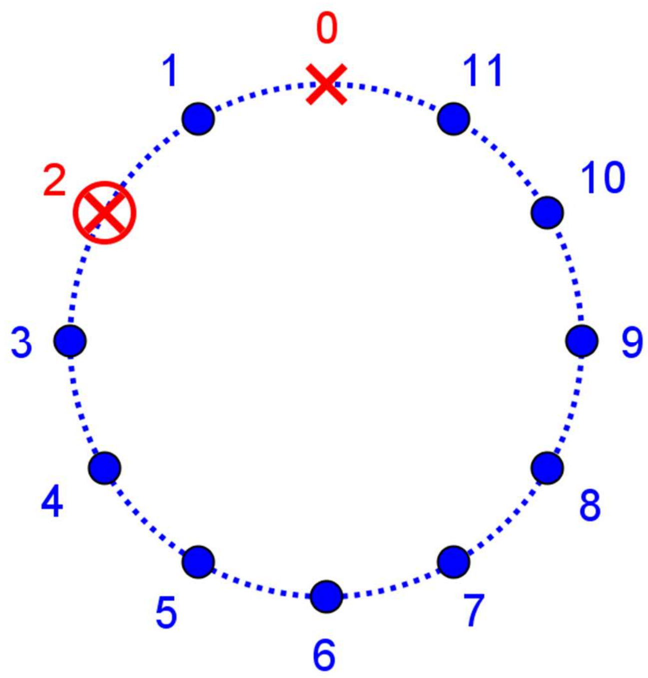
Une démonstration

Au premier tour, on élimine tous les soldats ayant un numéro pair.



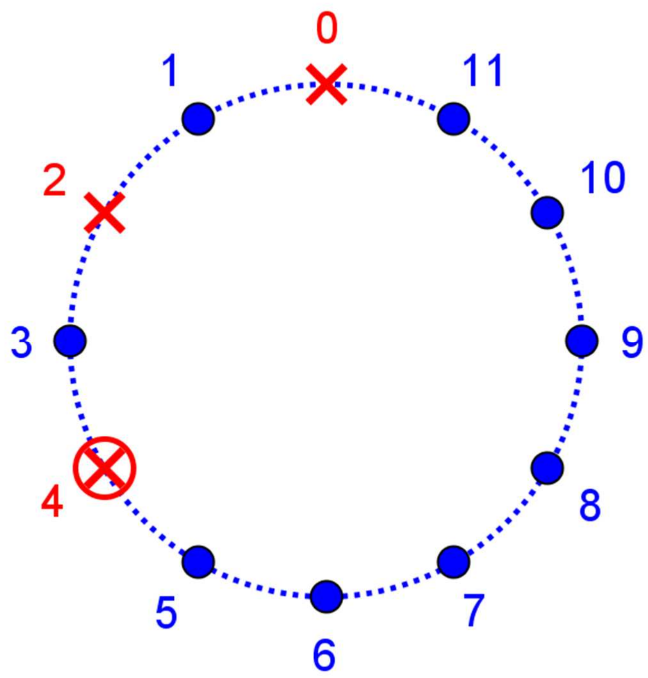
Une démonstration

Au premier tour, on élimine tous les soldats ayant un numéro pair.



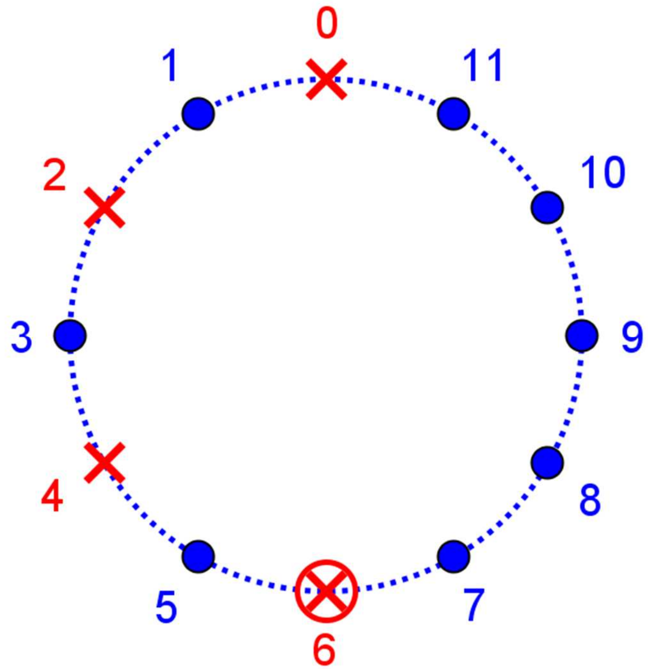
Une démonstration

Au premier tour, on élimine tous les soldats ayant un numéro pair.



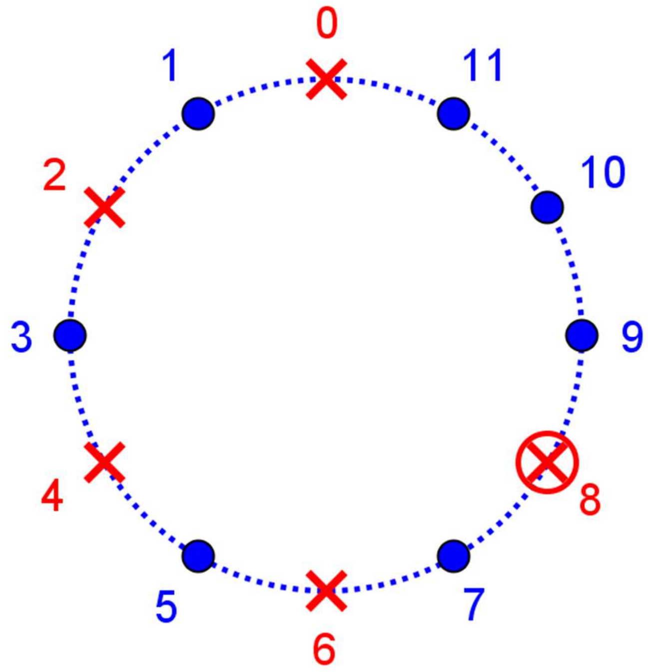
Une démonstration

Au premier tour, on élimine tous les soldats ayant un numéro pair.



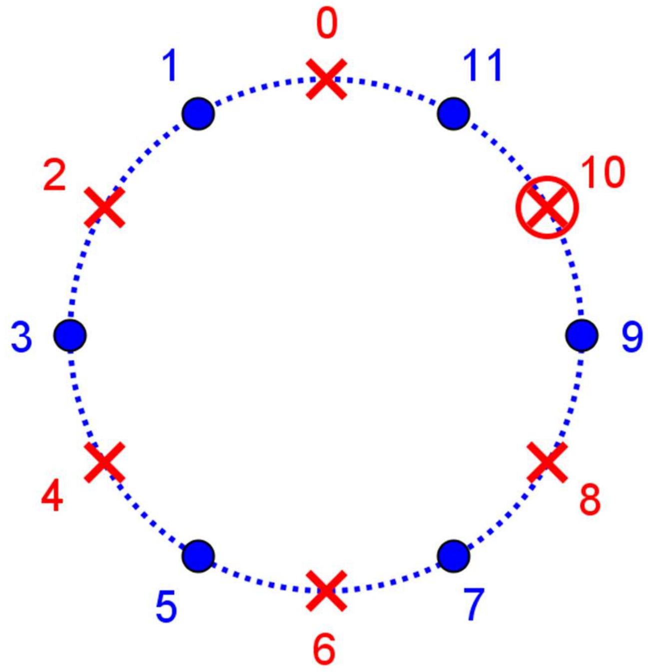
Une démonstration

Au premier tour, on élimine tous les soldats ayant un numéro pair.



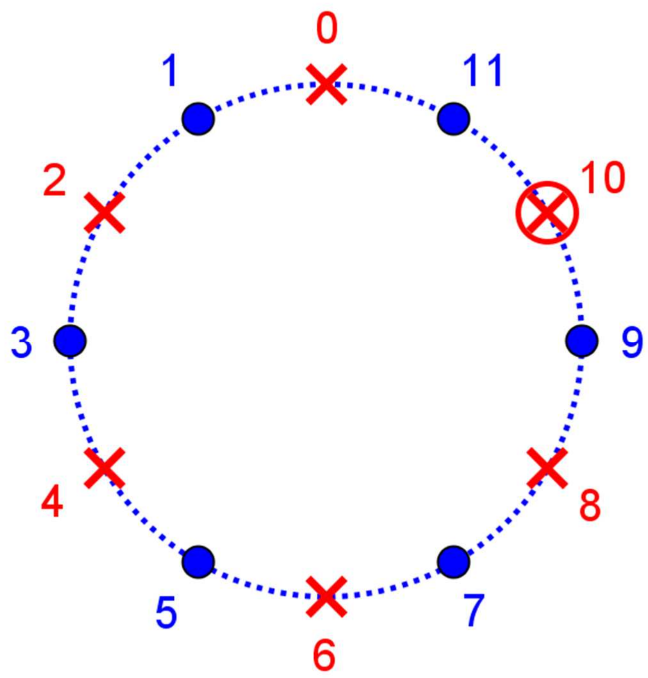
Une démonstration

Au premier tour, on élimine tous les soldats ayant un numéro pair.



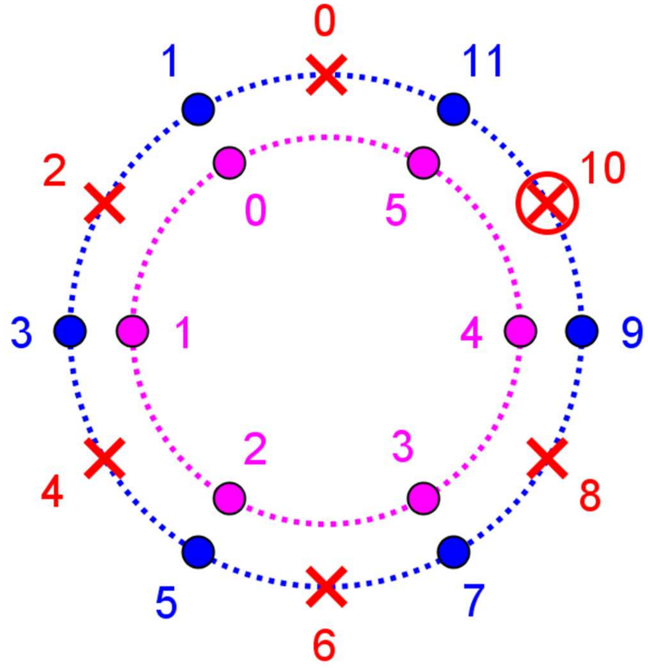
Une démonstration

Au premier tour, on élimine tous les soldats ayant un numéro pair. Il reste *n* soldats.



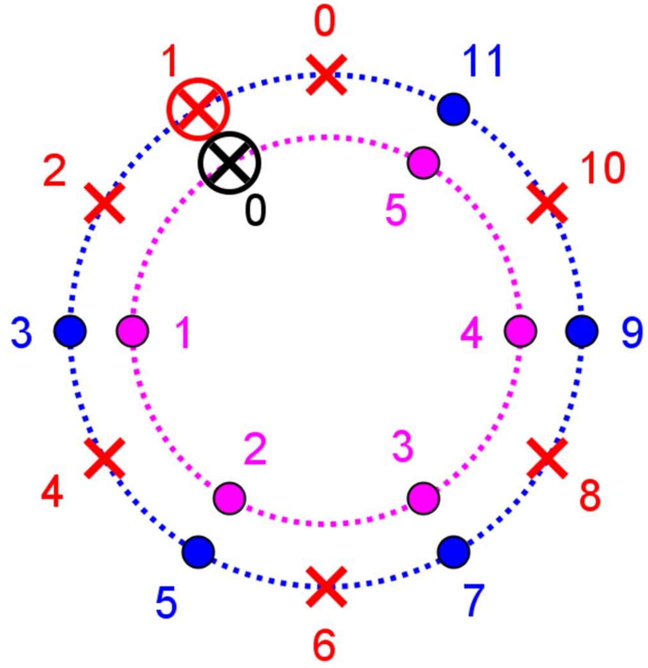
Une démonstration

On associe chaque survivant du grand cercle aux soldats d'un petit cercle de *n* soldats.



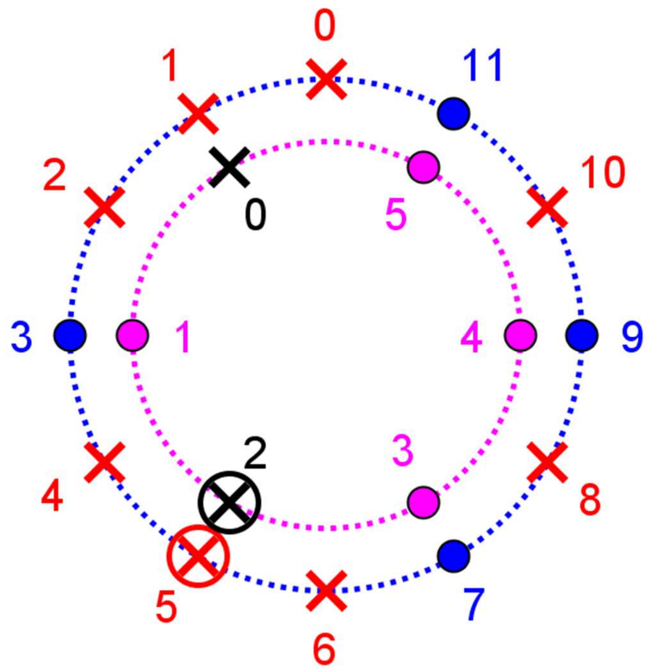
Une démonstration

On associe chaque survivant du grand cercle aux soldats d’un petit cercle de *n* soldats. Et on continue…



Une démonstration

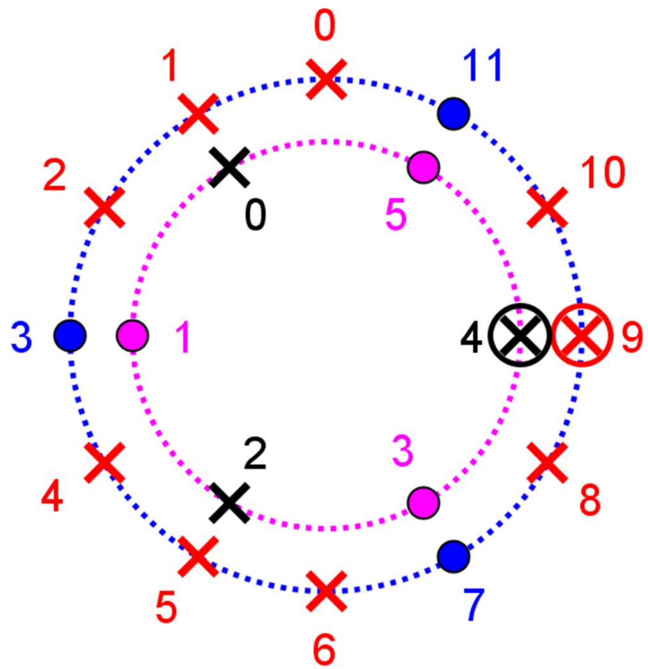
On associe chaque survivant du grand cercle aux soldats d'un petit cercle de *n* soldats. Et on continue…



Plus que quatre…

Une démonstration

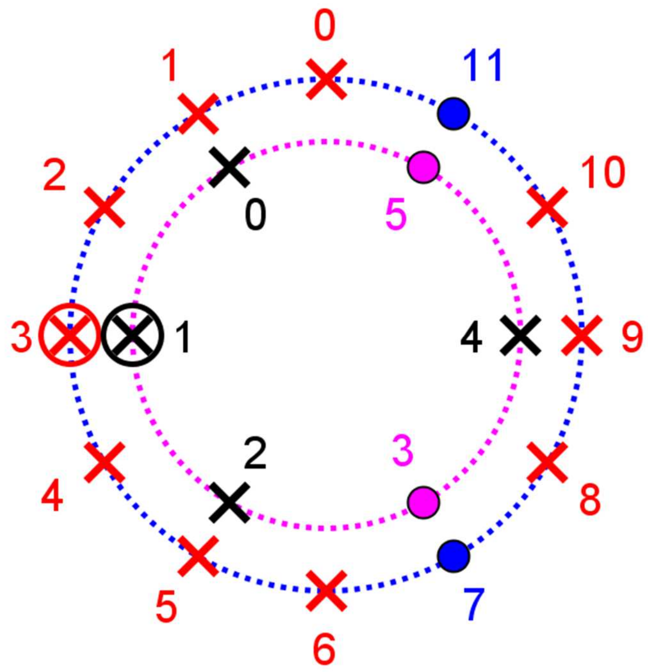
On associe chaque survivant du grand cercle aux soldats d'un petit cercle de *n* soldats. Et on continue…



Plus que trois…

Une démonstration

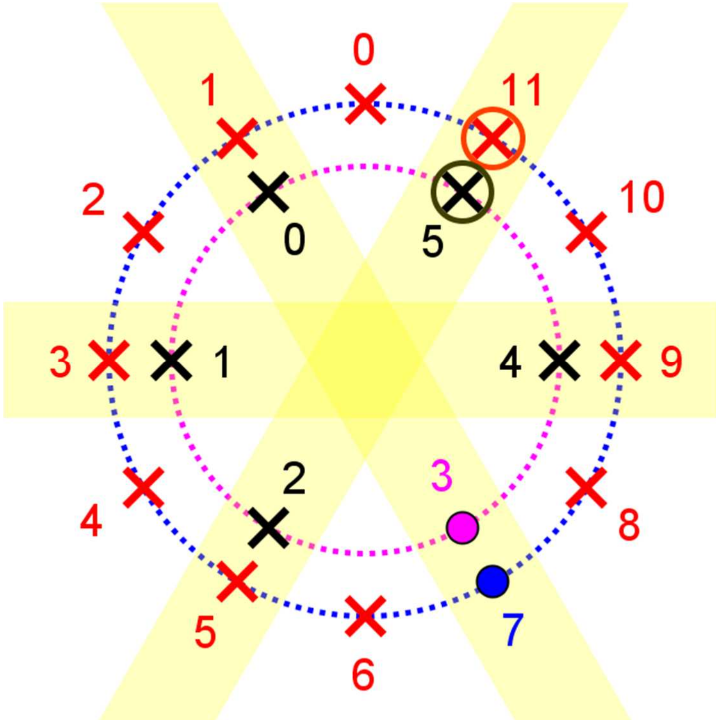
On associe chaque survivant du grand cercle aux soldats d'un petit cercle de *n* soldats. Et on continue…



Plus que deux…

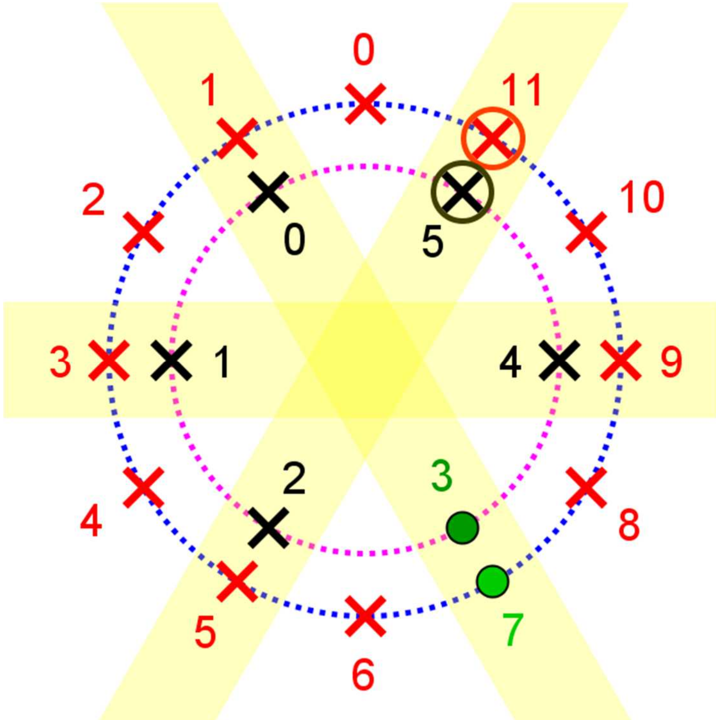
Une démonstration

Le soldat k du petit cercle est associé au soldat $2k+1$ du grand cercle.



Une démonstration

Le soldat k du petit cercle est associé au soldat $2k+1$ du grand cercle.



Le survivant du petit cercle est u_n donc le numéro du survivant du grand cercle est bien $2u_n+1$.

Deux relations de récurrence

- On sait que $u(1) = 0$ et $u(2) = 1$.
- On a établi que :
  pour tout entier naturel n non nul, $u_{2n} = 2u_n + 1$.
- Le même type de raisonnement donne :
  pour tout entier naturel n non nul, $u_{2n+1} = 2u_{n+1} - 1$.

Une formule plus directe

Grâce à nos observations précédentes, on a trouvé une méthode pour calculer u_n plus directement.

- On note 2^p la plus grande puissance de 2 strictement inférieure à n.

- On peut écrire $n = 2^p + c$
  avec c un entier tel que $0 < c \leq 2^p$.
  Autrement dit, $c = n - 2^p$.

- On a alors $u_n = 2c - 1$.

Une formule plus directe

Exemple : Calcul de u_{2024}.

- La plus grande puissance de 2 strictement inférieure à 2 024 est : $2^{10} = 1\ 024$.

- On a alors $c = 2024 - 2^{10} = 1000$.

- On a donc $u_{2024} = 2 \times 1000 - 1 = 1\ 999$.

Une formule plus directe

Autre exemple : Calcul de u_{333}.

- La plus grande puissance de 2 strictement inférieure à 333 est : $2^8 = 256$.

- On a alors $c = 333 - 2^8 = 333 - 256 = 77$.

- On a donc $u_{333} = 2 \times 77 - 1 = 153$.

Une deuxième démonstration

Pour démontrer cette formule, nous avons utilisé un raisonnement par récurrence.

La formule est bien vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$.

On suppose ensuite que la formule est vraie pour tout entier strictement inférieur à un entier n donné.
En distinguant le cas où n est pair et le cas où n est impair, on peut utiliser les deux relations de récurrence et démontrer que la formule est vraie au rang n.

Pour la suite...

- Essayer de traiter le problème originel où on élimine un soldat sur 3.

- Essayer de traiter le problème général où on élimine un soldat sur k.

Merci pour votre attention !