

LE VEUF STROGONOFF

Michel Strogonoff était veuf, mais il était beau.

Pour des raisons obscures, il décida de partir à l'aventure, sans un kopek en poche, à travers les étendues infinies de la Sibérie.

Las, à peine avait-il parcouru une verste¹ qu'il rencontra un ermite qui lui dit comme ça : "Michel Strogonoff, donne-moi un rouble, ou tu t'en repentiras."

- Mais, mon pauvre ermite, je suis trop pauvre, je ne peux pas te donner un rouble."

- Puisque c'est comme ça, répliqua l'ermite, c'est moi qui vais te donner un rouble ! Tiens !"

Michel Strogonoff était un peu surpris, mais content, et il reprit sa route, avec un rouble dans la poche.

Une verste plus loin, nouvel ermite, même tableau :

"Michel Strogonoff, donne-moi deux roubles, ou tu t'en repentiras."

- Mais, mon pauvre ermite, je suis trop pauvre, je ne peux pas te donner deux roubles."

- Puisque c'est comme ça, répliqua l'ermite, c'est moi qui vais te donner deux roubles ! Tiens !"

Michel Strogonoff était toujours un peu surpris, mais de plus en plus content, et il reprit sa route, avec maintenant trois roubles dans la poche.

Et à la fin de la troisième verste, ça recommence avec un troisième ermite :

"Michel Strogonoff, donne-moi trois roubles, ou tu t'en repentiras."

- Tiens, mon pauvre ermite, je me réjouis de pouvoir soulager ta misère !"

Et Michel Strogonoff lui donna ses trois roubles, et reprit sa route, la bourse vide, à la fois surpris et content, car un rien l'étonnait et c'était un heureux caractère.

Et ça continue comme ça, à la fin de la n -ième verste, un ermite lui demande n roubles. Si Michel Strogonoff les possède, il les lui donne, sinon c'est l'ermite qui lui donne n roubles.

1) Après avoir quitté le dixième ermite (donc après 10 verstes), combien Michel Strogonoff possède-t-il ?

2) Après avoir parcouru 2008 verstes et quitté le 2008^{ème} ermite, combien Michel Strogonoff possède-t-il ?

3) Quelle distance (en verstes) Michel Strogonoff devra-t-il parcourir pour détenir pour la première fois la coquette somme de 2008 roubles ?

1 Unité de longueur utilisée dans la Russie des Tsars, équivalant à un peu plus d'un kilomètre.

LE VEUF STROGONOFF
ELEMENTS DE CORRECTION

L'exercice traite d'une suite numérique qu'on peut définir ainsi:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} - n & \text{si } u_{n-1} \geq n \\ u_n = u_{n-1} + n & \text{sinon} \end{cases}, \forall n \geq 1$$

1) On obtient de proche en proche:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1

2) On montre (ou on constate) que : si $1 \leq u_n \leq n$, alors $u_{n+2} = u_n - 1$,
et que : si $u_n \geq n+1$, alors $u_{n+2} = u_n + 1$.

Ces résultats permettent de conclure que : si $u_n = 0$, alors $u_{n+1} = n+1, u_{n+3} = n, \dots, u_{3n+3} = 0$.

On peut alors trouver : $u_0 = u_3 = u_{12} = u_{39} = u_{120} = u_{363} = u_{1092} = u_{3279} = 0$.

Et à partir de $u_{1093} = 1093$, on arrive à $u_{2007} = 1093 - \frac{2007-1093}{2} = 636$ et $u_{2008} = 2644$.

3) Les u_n pour $1092 \leq n \leq 3279$ sont tous à l'extérieur de l'intervalle $[1094 ; 2186]$. Il faut donc chercher plus loin:

$u_{3280} = 3280 ; u_{3280+2k} = 3280 - k$ (pour $k \leq 3280$). On obtient alors, pour $k = 1272 : u_{5824} = 2008$.