Exercice (première STG)

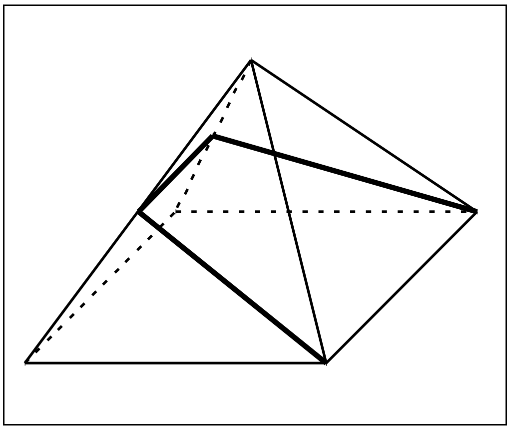
Le jeu des baguettes (d'après l'émission télévisée « Fort Boyard »)

Un certain nombre n de baguettes sont alignées entre deux adversaires A et B. Chacun joue à son tour en retirant une, deux ou trois baguettes du jeu. Celui qui reste avec la dernière baguette a perdu. Le joueur A commence.

1) Dans les cas $n = 1, 2, \ldots, 10$, donner une stratégie gagnante à ce jeu en précisant à chaque fois à qui elle profite ?
2) Et si le nombre n de baguettes est encore plus grand ?

Résumé :
Notons S = $\{1, 5, 9, 13, \ldots, 4q + 1, \ldots\}$ et S' = **N*** - S. Si le nombre initial de baguettes est dans S', le joueur A, en ôtant une, deux ou trois baguettes, peut toujours laisser au joueur B un nombre de baguettes appartenant à l'ensemble S. Héritant de cette situation, le joueur B, qu'il prenne une, deux ou trois baguettes, ne peut laisser au joueur A qu'un nombre de baguettes appartenant à l'ensemble S'. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que le joueur A laisse le joueur B prendre la dernière baguette.
En revanche, si le nombre initial de baguettes appartient à l'ensemble S, le joueur A, qu'il prenne une, deux ou trois baguettes, laisse au joueur B un nombre de baguettes appartenant à l'ensemble S' et c'est le joueur B qui adopte la stratégie décrite précédemment. Dans ce cas, c'est le joueur A qui se retrouve à prendre la dernière baguette.

Exercice (première S)



C'est l'heure du goûter ; deux amis, un artiste et un géomètre décident de s'attabler dans une pâtisserie. Ils ne commandent qu'un seul gâteau pour eux deux. Leur choix se porte sur un joli moka au café en forme de pyramide équilatère*. Le géomètre s'apprête à le partager équitablement en plaçant son couteau sur le sommet comme il est d'usage. L'artiste arrête alors son geste et lui propose une découpe plus originale : placer la lame sur le milieu d'une arête, parallèle à un côté de la base, puis couper en se dirigeant vers le côté opposé. Le géomètre a des doutes, les parts ne lui semblent pas égales.

* Pyramide régulière à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux.

Les arêtes ont toutes pour longueur 10 cm.

a) Calculer le volume exact de cette pyramide équilatère.
b) Quelle fraction du volume de la pyramide équilatère représente effectivement le volume de la part du dessus qui a la forme d'une pyramide à base trapézoïdale ?
c) Plutôt qu'au milieu, en quel point de l'arête faudrait-il placer la lame, pour qu'en procédant de la sorte, le partage soit équitable ?

Résumé :
La première question est classique, on obtient environ 235,7cm^3. Pour la seconde question on recoupe la pyramide selon le plan (SAC) et on obtient ainsi quatre morceaux. Les tétraèdres SIBC et SIJC ont des volumes dans un rapport ½. Comme les volumes de SIBC et de AIBC sont égaux on tire que Vol(SIJCB) = 3/8 Vol(SABCD). Enfin pour la dernière question on reprend la coupe selon le plan (SAC) et on écrit que l'on veut Vol(SIJCB) = Vol(SABC), en posant x = SA/SI on aboutit à l'équation $\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$ dont la solution positive est le nombre d'or. Pour partager en deux parts égales la pyramide équilatère selon la méthode préconisée par l'artiste il faudrait donc placer la lame au point de l'arête qui la divise en moyenne et extrême raison.

Remarque 1. On aurait aussi pu procéder de la façon suivante : on prolonge le segment [IJ] en le segment [I'J'] afin d'obtenir le prisme droit à base triangulaire AI'BDJ'C dont le volume est facilement exprimable et on ôte à ce prisme les tétraèdres identiques IAI'B et JDJ'C.
Remarque 2. Les réponses données aux deux dernières questions restent valables pour une pyramide quelconque dont la base est un parallélogramme.