La place de théâtre

Juliette BOUTIN--CADANE
Apolline GERLAND

Paul Guerin | Niort
lycée polyvalent

Présentation du problème

J'ai réservé une place pour un spectacle dans une salle de 2000 personnes.
Hélas, j'ai oublié le numéro de ma place !
J'entre la première, je m'assois au hasard, puis j'attends qu'un autre spectateur me déloge.
Je m'assois alors sur un autre siège laissé vide et procède ainsi de suite jusqu'à trouver ma place.

Présentation du problème

En moyenne,
combien de fois vais-je me relever ?
Qu'en pensez-vous ?

Présentation du problème

En moyenne,
combien de fois vais-je me relever ?
Qu'en pensez-vous ?

10 fois ?
100 fois ?
1 000 fois ?
1 500 fois ?
1 900 fois ?

Avec une salle… de 2 places !

- Une chance sur deux de s’asseoir directement à la bonne place : dans ce cas on se relève 0 fois.
- Une chance sur deux de s’asseoir sur l’autre place : dans ce cas on se relève 1 fois.

Finalement, on se relève en moyenne 0,5 fois.

Des simulations « à la main » avec une salle de 3 places

On choisit une répartition des places au hasard.
Apolline a perdu son numéro et entre la première.

Apolline	Juliette	Fabien
Ticket n° 1	Ticket n° 2	Ticket n° 3

Place n° 1	Place n° 2	Place n° 3
		Apolline

Apolline s'assoit au hasard à la place n° 3.

Des simulations « à la main » avec une salle de 3 places

Fabien entre dans la salle. Apolline doit se relever.
Apolline choisit alors au hasard la place n° 1.

Apolline	Juliette	Fabien
Ticket n° 1	Ticket n° 2	Ticket n° 3

Place n° 1	Place n° 2	Place n° 3
Apolline		Fabien

Juliette entre dans la salle et peut s'asseoir.
Au bout du compte, Apolline s'est relevée une fois.

Des simulations « à la main » avec une salle de 3 places

En réalisant 12 fois cette expérience, nous avons obtenu les résultats suivants :

Nombre de fois où on se relève	0	1	2
Effectif	3	5	4
Fréquence	0,25	0,42	0,33

En moyenne, il a fallu se relever environ 1,08 fois.

Des simulations « à la main » avec une salle de 4 places

On choisit une répartition des places au hasard.
Apolline a perdu son numéro et entre la première.
Apolline s'assoit au hasard à la place n° 3.

Apolline	Juliette	Fabien	Thomas
Ticket n° 1	Ticket n° 2	Ticket n° 3	Ticket n° 4

Place n° 1	Place n° 2	Place n° 3	Place n° 4
		Apolline	

Des simulations « à la main » avec une salle de 4 places

Juliette entre dans la salle et s'assoit à la place n° 2.
Apolline n'a pas besoin de bouger pour l'instant.

Apolline	Juliette	Fabien	Thomas
Ticket n° 1	Ticket n° 2	Ticket n° 3	Ticket n° 4

Place n° 1	Place n° 2	Place n° 3	Place n° 4
	Juliette	Apolline	

Des simulations « à la main » avec une salle de 4 places

Fabien entre dans la salle et s’assoit à la place n° 3.
Apolline doit se relever.
Apolline choisit alors au hasard la place n° 4.

Apolline	Juliette	Fabien	Thomas
Ticket n° 1	Ticket n° 2	Ticket n° 3	Ticket n° 4

Place n° 1	Place n° 2	Place n° 3	Place n° 4
	Juliette	Fabien	Apolline

Des simulations « à la main » avec une salle de 4 places

Thomas entre dans la salle et s’assoit à la place n° 4.
Apolline doit se relever.
Apolline s’assoit alors à la place n° 1.

Apolline	Juliette	Fabien	Thomas
Ticket n° 1	Ticket n° 2	Ticket n° 3	Ticket n° 4

Place n° 1	Place n° 2	Place n° 3	Place n° 4
Apolline	Juliette	Fabien	Thomas

Au bout du compte, Apolline s’est relevée deux fois.

Des simulations « à la main » avec une salle de 4 places

En réalisant 32 fois cette expérience, nous avons obtenu les résultats suivants :

Nombre de fois où on se relève	0	1	2	3
Effectif	5	16	9	2
Fréquence	0,16	0,50	0,28	0,06

En moyenne, il a fallu se relever 1,25 fois.

Des simulations informatiques

```
import random
def places(n):
    L=[]
    o=0                         # initialisation du nombre de changements de siège
    for d in range(1,n+1):
        L.append(d)             # L = liste de toutes les places non occupées
    v=random.randint(1,n)       # v = notre vraie place
    k=random.randint(1,n)       # place choisie au début
    liste=L[:]
    del liste[v-1]              # on construit la liste des places des autres
    random.shuffle(liste)       # on mélange cette liste
    for p in liste:             # p va prendre les valeurs des places des autres
        if k==p and k!=v:       # si quelqu'un vient à notre place
            L.remove(p)         # on enlève de la liste L la place occupée
            k=random.choice(L)  # on choisit une nouvelle place inoccupée
            o+=1                # on a changé de place 1 fois de plus
        elif k!=p and k!=v:     # si quelqu'un s'assoit mais ne prend pas notre place
            L.remove(p)         # on enlève de la liste la place occupée
        elif k==v:              # si on est à la bonne place
            return(o)           # renvoie le nombre de fois où l'on a changé de place
    return(o)

def moyenne(d,n):               # renvoie la moyenne de d simulations pour n places
    v=0
    for p in range(0,d):
        v+=places(n)
    return(v/d)

print(moyenne(1000,2000))
```

Des simulations informatiques

Le programme permet de simuler 1000 fois le « jeu » avec une salle de 2000 places.

En lançant plusieurs fois ce programme, on obtient toujours un résultat légèrement supérieur à…

Des simulations informatiques

Le programme permet de simuler 1000 fois le « jeu » avec une salle de 2000 places.

En lançant plusieurs fois ce programme, on obtient toujours un résultat légèrement supérieur à…**7** !

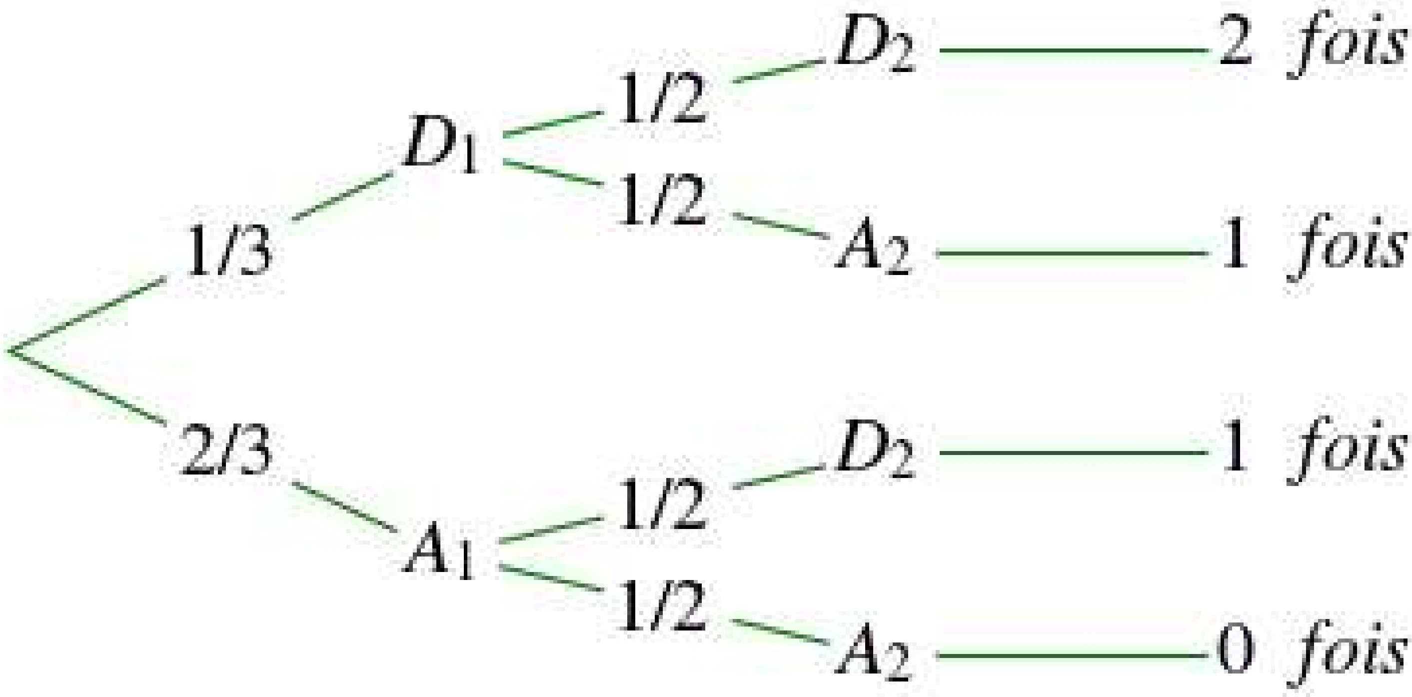
Calcul de l'espérance

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où on se relève dans une salle de n places.

On a déjà vu que $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

Calcul de l'espérance

Pour $n = 3$, nous avons réalisé un arbre :



(A pour assis, D pour debout)

Calcul de l'espérance

Après calculs, on a donc :

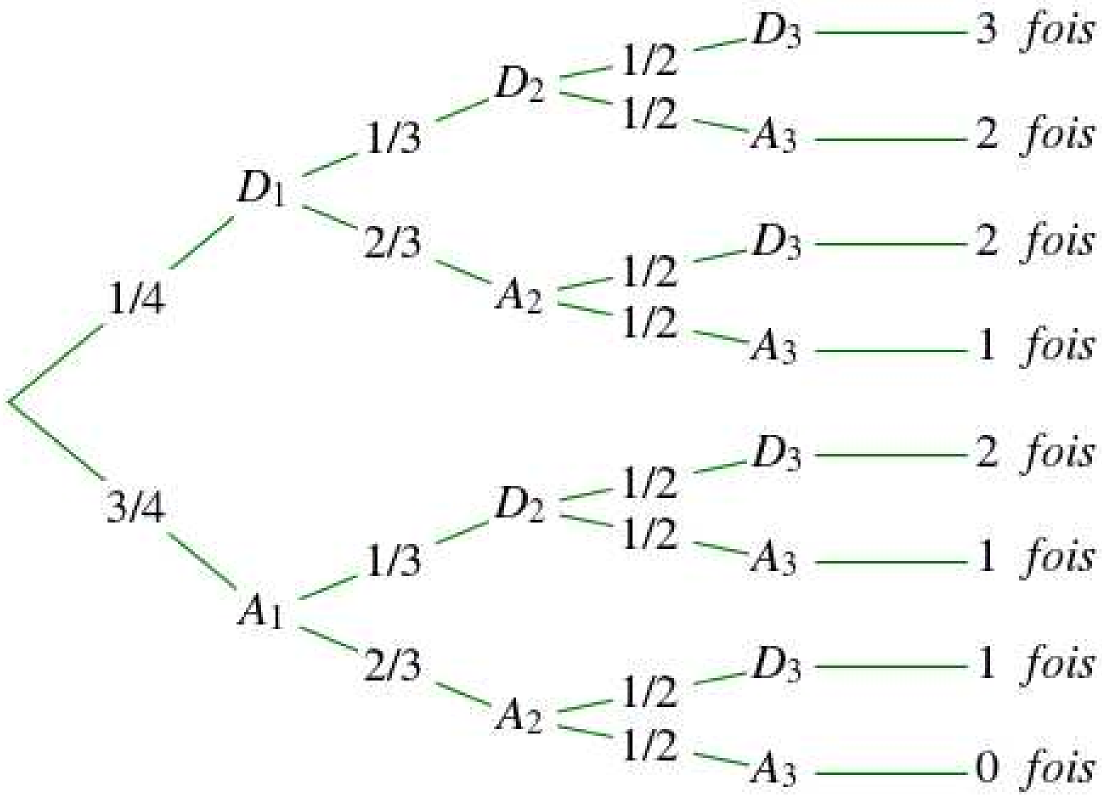
k	0	1	2
$P(X_3 = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Finalement : $E(X_3) = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$.

En moyenne, on se lève environ 0,83 fois.

Calcul de l'espérance

Pour $n = 4$, nous avons aussi réalisé un arbre.



Calcul de l'espérance

Après calculs, on a donc :

k	0	1	2	3
$P(X_4 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

Finalement : $E(X_4) = \frac{13}{12} \approx 1{,}083$.

En moyenne, on se lève environ 1,083 fois.

Calcul de l'espérance

Pour $n = 5$, un arbre devient trop long…

Pour obtenir l'événement $X_5 = 1$ on a deux possibilités :

- on se lève pour la première personne
  puis on reste assis pour les suivantes ;
- on reste assis pour la première personne
  puis on ne se lève qu'une seule fois pour les suivantes.

Finalement :

$$P(X_5 = 1) = P(D_1) \times P(X_4 = 0) + P(A_1) \times P(X_4 = 1)$$

$$P(X_5 = 1) = \frac{1}{5} \times P(X_4 = 0) + \frac{4}{5} \times P(X_4 = 1)$$

Calcul de l'espérance

Des calculs similaires permettent d'obtenir la loi de probabilité de X_5.

Finalement : $E(X_5) = \frac{77}{60} \approx 1{,}283$.

De même, on a obtenu : $E(X_6) = \frac{29}{20} = 1{,}45$.

Une conjecture

$$E(X_2) = \frac{1}{2}$$

$$E(X_3) = \frac{5}{6}$$

$$E(X_4) = \frac{13}{12}$$

$$E(X_5) = \frac{77}{60}$$

$$E(X_6) = \frac{29}{20}$$

Une conjecture

$$E(X_2) = \frac{1}{2}$$

$$E(X_3) = \frac{5}{6}$$

$$E(X_4) = \frac{13}{12}$$

$$E(X_5) = \frac{77}{60}$$

$$E(X_6) = \frac{29}{20}$$

Une conjecture

$$E(X_2) = \frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{3}$$

$$E(X_3) = \frac{5}{6}$$

$$+\frac{1}{4}$$

$$E(X_4) = \frac{13}{12}$$

$$+\frac{1}{5}$$

$$E(X_5) = \frac{77}{60}$$

$$+\frac{1}{6}$$

$$E(X_6) = \frac{29}{20}$$

Une conjecture

$$E(X_2) = \frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{3}$$

$$E(X_3) = \frac{5}{6}$$

$$+\frac{1}{4}$$

$$E(X_4) = \frac{13}{12}$$

$$+\frac{1}{5}$$

$$E(X_5) = \frac{77}{60}$$

$$+\frac{1}{6}$$

$$E(X_6) = \frac{29}{20}$$

$E(X_{n+1}) = E(X_n) + \frac{1}{n+1}$ pour tout entier $n \geq 2$

Une preuve !

Nous avons établi par le calcul la relation de récurrence en utilisant les astuces précédentes…
mais les calculs sont assez fastidieux !

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} k \times P(X_{n+1}=k) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_{n+1}=k) + n \times P(X_{n+1}=n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\big(P(D_1)\times P(X_n=k-1) + P(A_1)\times P(X_n=k)\big) + n\times P(D_1)\times P(X_n=n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{n+1}P(X_n=k-1) + \frac{n}{n+1}P(X_n=k)\right) + n\times\frac{1}{n+1}P(X_n=n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{n+1}P(X_n=k-1)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{n}{n+1}P(X_n=k)\right) + n\times\frac{1}{n+1}P(X_n=n-1) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n=k-1) + \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n=k) + n\times\frac{1}{n+1}P(X_n=n-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} kP(X_n=k-1) + \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n=k) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X_n=k) + \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n=k) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X_n=k) + \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n=k) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} \big(kP(X_n=k) + P(X_n=k)\big) + \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n=k) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n=k) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n=k) + \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n=k) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right)}_{=1}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n=k)}_{=E(X_n)} + \frac{1}{n+1}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n=k)}_{=1} \\
&= E(X_n) + \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Une autre approche

Pour une salle de $n + 1$ places, on a deux situations :

• ***situation 1 :***
on doit se relever quand la première personne rentre et on se relèvera donc en moyenne $1 + E(X_n)$ fois ;
Cela arrive avec une probabilité égale à : $\frac{1}{n+1}$.

• ***situation 2 :***
on reste assis quand la première personne rentre et on se relèvera donc en moyenne $E(X_n)$ fois.
Cela arrive avec une probabilité égale à : $1 - \frac{1}{n+1}$.

Une autre approche

Finalement :

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{n+1}(1 + E(X_n)) + (1 - \frac{1}{n+1})E(X_n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} E(X_n) + E(X_n) - \frac{1}{n+1}E(X_n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + E(X_n)$$

Une autre approche

Comme la relation de récurrence est vraie, on a :

$$E(X_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

Quelques valeurs

Pour une salle de 2 000 places, on a :

$$E(X_{2\,000}) \approx 7{,}18.$$

Pour une salle de 10 000 places, on a :

$$E(X_{10\,000}) \approx 8{,}79.$$

Pour un stade de 50 000 places, on a :

$$E(X_{50\,000}) \approx \ldots\ldots.$$

Quelques valeurs

Pour une salle de 2 000 places, on a :

$$E(X_{2\,000}) \approx 7{,}18.$$

Pour une salle de 10 000 places, on a :

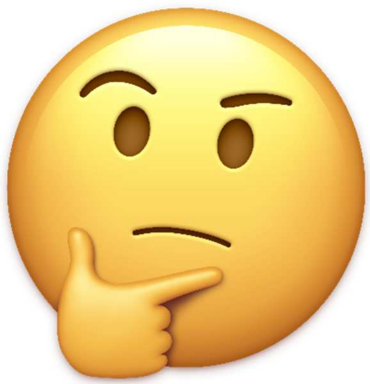
$$E(X_{10\,000}) \approx 8{,}79.$$

Pour un stade de 50 000 places, on a :

$$E(X_{50\,000}) \approx \mathbf{10{,}397} \text{ !!!}$$

Une limite finie ?

Est-ce que $E(X_n)$ a une limite finie
quand n tend vers $+\infty$?



L'intuition sauvée ?

Soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l'entier *n*.
On a : $E(X_n) \geq E(X_{2m})$.
Or $E(X_{2m})$ =

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\cdots+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

L'intuition sauvée ?

Soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l'entier n.
On a : $E(X_n) \geq E(X_{2m})$.
Or $E(X_{2m}) =$

$$\underbrace{\frac{1}{2^1}}_{=\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\cdots+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

L'intuition sauvée ?

Soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l'entier n.

On a : $E(X_n) \geq E(X_{2m})$.

Or $E(X_{2m})$ =

$$\underbrace{\frac{1}{2^1}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}}_{\substack{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \cdots + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

L'intuition sauvée ?

Soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l'entier n.
On a : $E(X_n) \geq E(X_{2^m})$.
Or $E(X_{2^m}) =$

$$\underbrace{\frac{1}{2^1}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}}_{\substack{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}}_{\substack{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \cdots + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

L’intuition sauvée ?

Soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l’entier n.

On a : $E(X_n) \geq E(X_{2m})$.

Or $E(X_{2m})$ =

$$\underbrace{\frac{1}{2^1}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}}_{\substack{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}}_{\substack{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{2^4}}_{\substack{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \cdots + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

L’intuition sauvée ?

Soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l’entier *n*.

On a : $E(X_n) \geq E(X_{2m})$.

Or $E(X_{2m})$ =

$$\underbrace{\frac{1}{2^1}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{2^4}}_{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\cdots + \frac{1}{2^m}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

L'intuition sauvée ?

Soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l'entier n.

On a : $E(X_n) \geq E(X_{2m})$.

Or $E(X_{2m}) =$

$$\underbrace{\frac{1}{2^1}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}}_{\substack{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}}_{\substack{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{2^4}}_{\substack{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \cdots + \underbrace{\cdots + \frac{1}{2^m}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

Et donc $E(X_n) \geq E(X_{2m}) \geq m \times \frac{1}{2}$ qui tend vers l'infini.

Merci pour votre attention !