La pâte feuilletée

Collège
Marguerite-DE-VALOIS
Angoulême

Collège
Jules-VERNE
Angoulême

1. Le sujet de recherche

- Un pâtissier prépare de la pâte feuilletée. Pour la fabriquer, il pose un rectangle de pâte d'un mètre de long sur la table.
  - Puis, à l'aide d'un rouleau, il étale la pâte jusqu'à ce qu’elle ait doublé de longueur.
  - Ensuite, il la plie en deux.
  - Et il recommence plusieurs fois.
- À un moment donné, il aperçoit un petit morceau de coquille d’œuf dans la pâte.
  - « Je l'enlèverai plus tard. » se dit-il.
- Mais après 3 pliages, il s'étonne de voir que le morceau de coquille d’œuf est revenu exactement à la même place !

1. Les questions

- Où se trouvait le morceau de coquille d'œuf au départ ?
  - Y a-t-il plusieurs endroits possibles ?
- Et si le morceau de coquille d'œuf revient à la même place après 5 pliages, 7 pliages, 53 pliages, où se trouvait-il au départ ?
- Existe t-il des positions de départ où on ne repasse jamais par le même endroit ?

2. Nos premiers essais avec des nombres décimaux

- On a placé la coquille d'œuf au départ tous les cinq centimètres de 0 m à 1 m :
  - 0 m ; 0,05 m = 5 cm ; 0,1 m = 10 cm ; 0,15 m ; 0,2 m ; 0,25 m ; … ; 0,9 m ; 0,95 m ; 1 m.
- Tout d'abord, on a fait beaucoup de calculs « à la main » pour comprendre comment cela fonctionnait.
- Par exemple :
  - 0,1 m → 0,2 m → 0,4 m → 0,8 m → 0,4 m → …
- Puis, pour automatiser les calculs, on a utilisé un tableur avec la formule :
  - =SI(2*position<1;2*position;2-2*position).

2. Nos premiers essais avec des nombres décimaux

Essai	Départ	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	0,4
3	0,1	0,2	0,4	0,8	0,4	0,8
4	0,15	0,3	0,6	0,8	0,4	0,8
5	0,2	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4
6	0,25	0,5	1	0	0	0
7	0,3	0,6	0,8	0,4	0,8	0,4
8	0,35	0,7	0,6	0,8	0,4	0,8
9	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8
10	0,45	0,9	0,2	0,4	0,8	0,4
11	0,5	1	0	0	0	0
12	0,55	0,9	0,2	0,4	0,8	0,4
13	0,6	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8
14	0,65	0,7	0,6	0,8	0,4	0,8
15	0,7	0,6	0,8	0,4	0,8	0,4
16	0,75	0,5	1	0	0	0
17	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4
18	0,85	0,3	0,6	0,8	0,4	0,8
19	0,9	0,2	0,4	0,8	0,4	0,8
20	0,95	0,1	0,2	0,4	0,8	0,4
21	1	0	0	0	0	0

2. Quelques remarques sur ces premiers essais

- Lorsque la coquille d'œuf se trouve au départ sur le bord de la pâte feuilletée (à 0 m), elle ne bouge pas.
- Il y a deux positions où la coquille revient au point de départ en deux fois (dommage puisque ce n'est pas trois !) :
  - c'est lorsqu'elle se trouvait à 0,4 m = 40 cm du bord ;
  - ou à 0,8 m = 80 cm du bord.
- Pour tous nos autres essais, on finit toujours par tomber au bout d'un certain nombre de pliages sur 0 m ou 0,4 m ou 0,8 m.

2. Nos premiers essais avec des nombres décimaux

Essai	Départ	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	0,4
3	0,1	0,2	0,4	0,8	0,4	0,8
4	0,15	0,3	0,6	0,8	0,4	0,8
5	0,2	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4
6	0,25	0,5	1	0	0	0
7	0,3	0,6	0,8	0,4	0,8	0,4
8	0,35	0,7	0,6	0,8	0,4	0,8
9	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8
10	0,45	0,9	0,2	0,4	0,8	0,4
11	0,5	1	0	0	0	0
12	0,55	0,9	0,2	0,4	0,8	0,4
13	0,6	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8
14	0,65	0,7	0,6	0,8	0,4	0,8
15	0,7	0,6	0,8	0,4	0,8	0,4
16	0,75	0,5	1	0	0	0
17	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4
18	0,85	0,3	0,6	0,8	0,4	0,8
19	0,9	0,2	0,4	0,8	0,4	0,8
20	0,95	0,1	0,2	0,4	0,8	0,4
21	1	0	0	0	0	0

3. Nos autres essais avec des nombres décimaux

- On place la coquille d'œuf au départ tous les centimètres de 0 m à 1 m :
  - 0 m ; 0,01 m = 1 cm ; 0,02 m = 2 cm ; 0,03 m ; 0,04 m ; 0,05 m ; … ; 0,98 m ; 0,99 m ; 1 m.
- On retrouve les résultats précédents :
  - une seule position de départ où la coquille d'œuf ne bouge pas : 0 m ;
  - deux positions de départ où la coquille d'œuf revient en deux fois : 0,4 m et 0,8 m.

3. Un extrait de nos autres essais avec des nombres décimaux

55	**0,54**	0,92	0,16	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08
56	**0,55**	0,9	0,2	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4
57	**0,56**	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88
58	**0,57**	0,86	0,28	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64
59	**0,58**	0,84	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16
60	**0,59**	0,82	0,36	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32
61	**0,6**	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8
62	**0,61**	0,78	0,44	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64	0,72
63	**0,62**	0,76	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24
64	**0,63**	0,74	0,52	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24
65	**0,64**	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64	0,72
66	**0,65**	0,7	0,6	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8
67	**0,66**	0,68	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32
68	**0,67**	0,66	0,68	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16
69	**0,68**	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64
70	**0,69**	0,62	0,76	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88
71	**0,7**	0,6	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4	0,8	0,4
72	**0,71**	0,58	0,84	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08
73	**0,72**	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64	0,72	0,56
74	**0,73**	0,54	0,92	0,16	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96
75	**0,74**	0,52	0,96	0,08	0,16	0,32	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48

3. Quelques remarques sur nos autres essais

- On trouve en plus dix positions de départ où la coquille d'œuf revient en dix fois :
  - 0,08 m = 8 cm ; 0,16 m = 16 cm ; 0,24 m ; 0,32 m ; 0,48 m ; 0,56 m ; 0,64 m ; 0,72 m ; 0,88 m ; 0,96 m.
- Pour toutes les autres positions de départ, on retombe dans des boucles :
  - sur l'une des dix positions précédentes ;
  - ou sur 0 m ; 0,4 m ; 0,8 m.

4. Nos essais avec des fractions

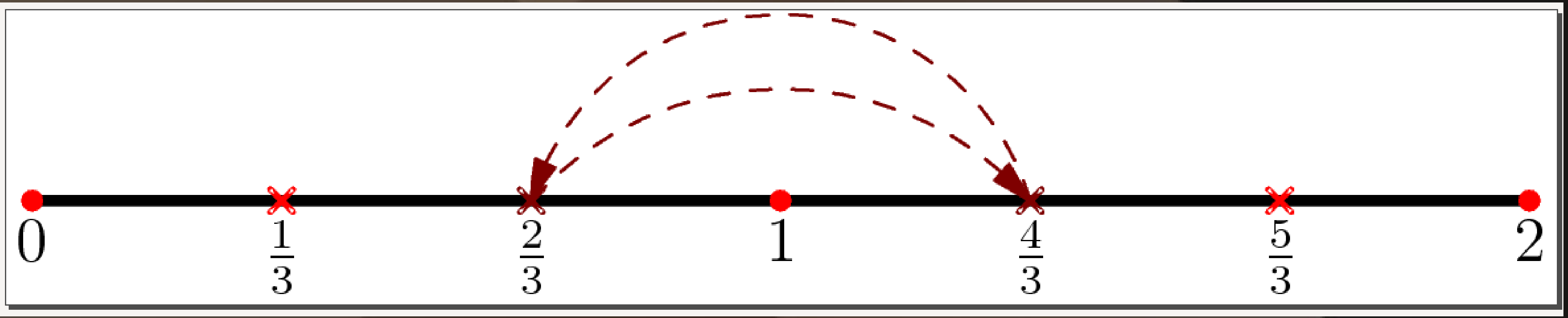
- Comme nous n'avons pas encore trouvé la solution à la première question du chercheur, nous avons essayé avec d'autres nombres au départ comme des fractions :
  - 1/2 m ; 1/3 m ; 1/4 m ; 1/5 m ; 1/6 m ; 1/7 m ; 1/8 m ; 1/9 m ;
  - 2/3 m ; 2/5 m ; 2/7 m ; 2/9 m ;
  - 3/4 m ; 3/5 m ; 3/7 m ; 3/8 m ;
  - 4/5 m ; 4/7 m ; 4/9 m ;
  - 5/6 m ; 5/7 m ; 5/8 m ; 5/9 m ;
  - 6/7 m ;
  - 7/8 m ; 7/9 m ;
  - 8/9 m.

4. Un extrait de nos essais avec des fractions

7	1/8	1/4	1/2	1	0
8	1/9	2/9	4/9	8/9	2/9
9	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
10	2/5	4/5	2/5	4/5	2/5
11	2/7	4/7	6/7	2/7	4/7
12	2/9	4/9	8/9	2/9	4/9
13	3/4	1/2	1	0	0
14	3/5	4/5	2/5	4/5	2/5
15	3/7	6/7	2/7	4/7	6/7
16	3/8	3/4	1/2	1	0
17	4/5	2/5	4/5	2/5	4/5
18	4/7	6/7	2/7	4/7	6/7
19	4/9	8/9	2/9	4/9	8/9
20	5/6	1/3	2/3	2/3	2/3
21	5/7	4/7	6/7	2/7	4/7
22	5/8	3/4	1/2	1	0
23	5/9	8/9	2/9	4/9	8/9
24	6/7	2/7	4/7	6/7	2/7
25	7/8	1/4	1/2	1	0
26	7/9	4/9	8/9	2/9	4/9
27	8/9	2/9	4/9	8/9	2/9

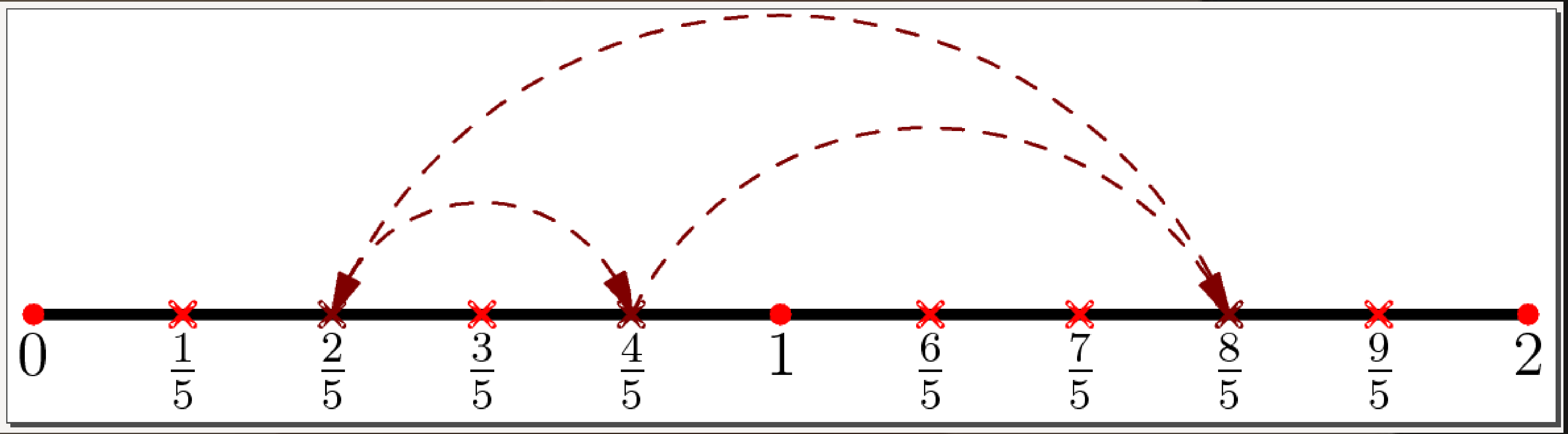
4. Quelques remarques sur ces essais

- On trouve une autre position de départ où la coquille d'œuf ne bouge pas :
  - 2/3 m.



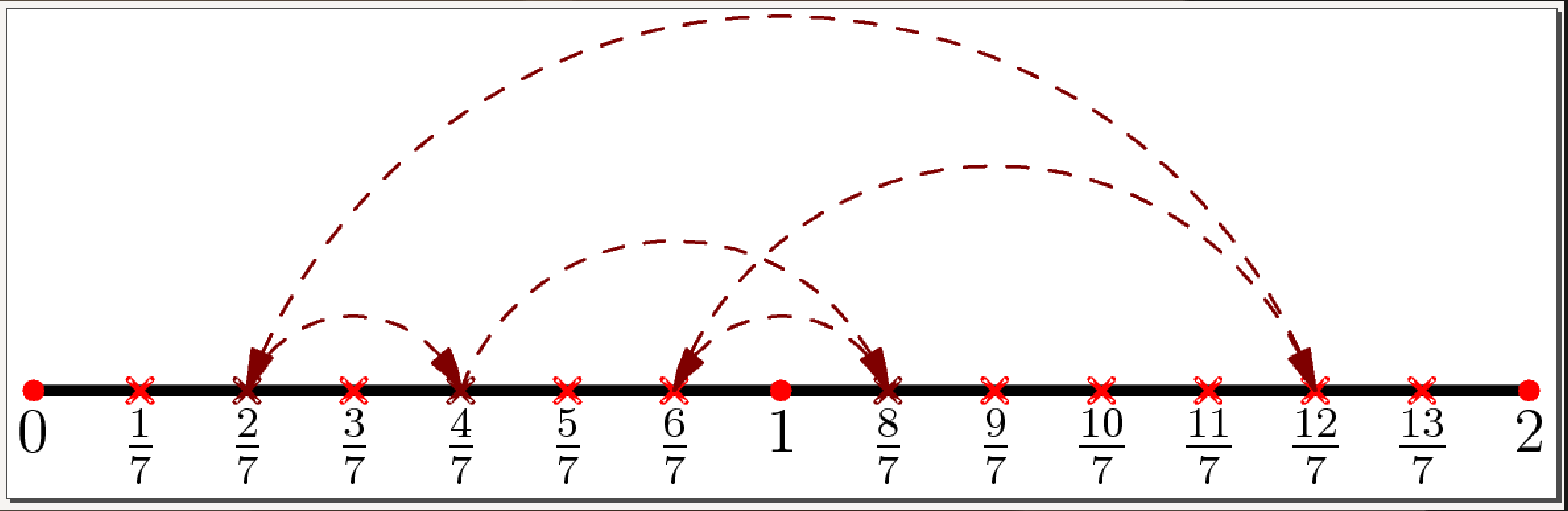
4. Quelques remarques sur ces essais

- On retrouve nos deux positions de départ où la coquille d'œuf revient en deux fois :
  - 2/5 m = 0,4 m ; 4/5 m = 0,8 m.



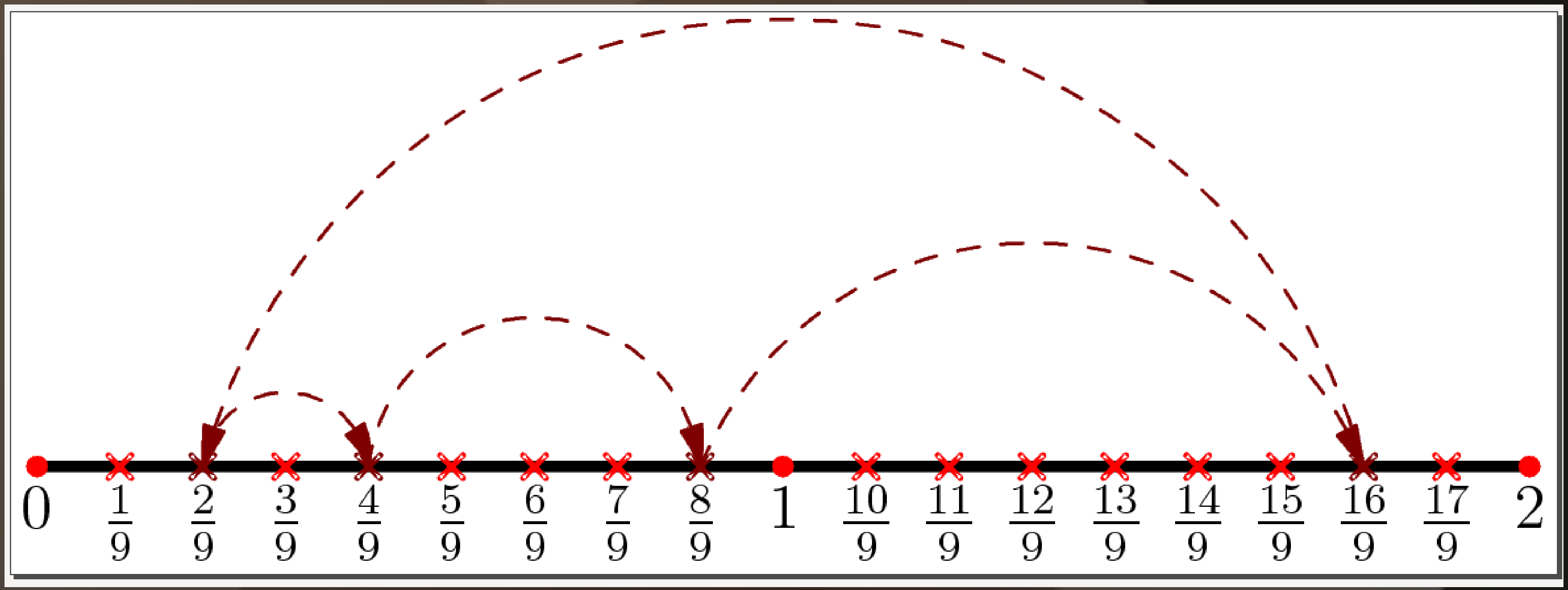
4. Quelques remarques sur ces essais

- On a trouvé un premier groupe de trois positions de départ pour lesquelles la coquille d'œuf revient en trois fois (Hourra!) :
  - 2/7 m ; 4/7 m ; 6/7 m.



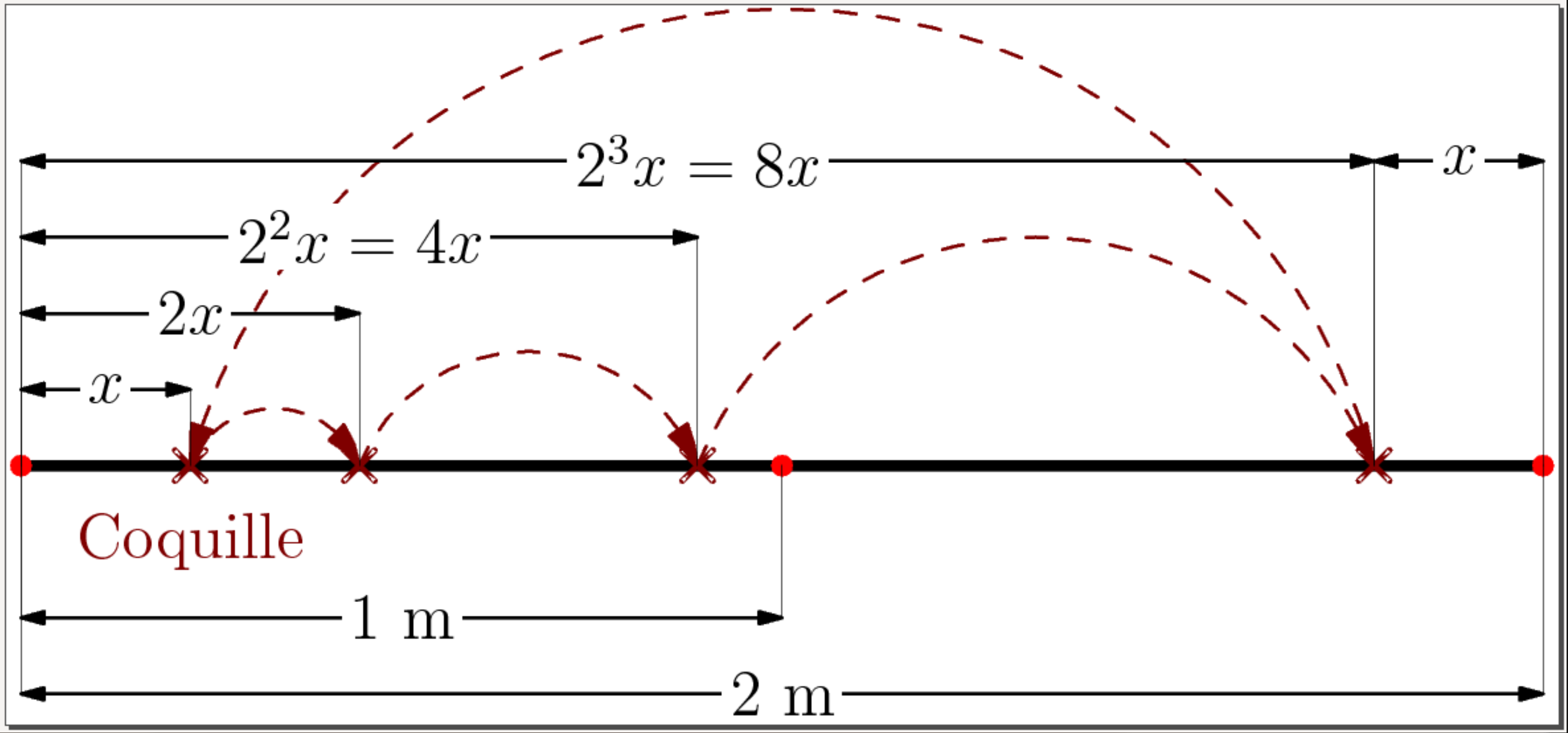
4. Quelques remarques sur ces essais

- On a trouvé un deuxième groupe de trois positions de départ pour lesquelles la coquille d'œuf revient en trois fois :
  - 2/9 m ; 4/9 m ; 8/9 m.



5. Notre première équation

- On place la coquille d'œuf au départ suffisamment proche du bord pour qu'elle ne soit concernée que par le dernier pliage pour revenir à sa position initiale.



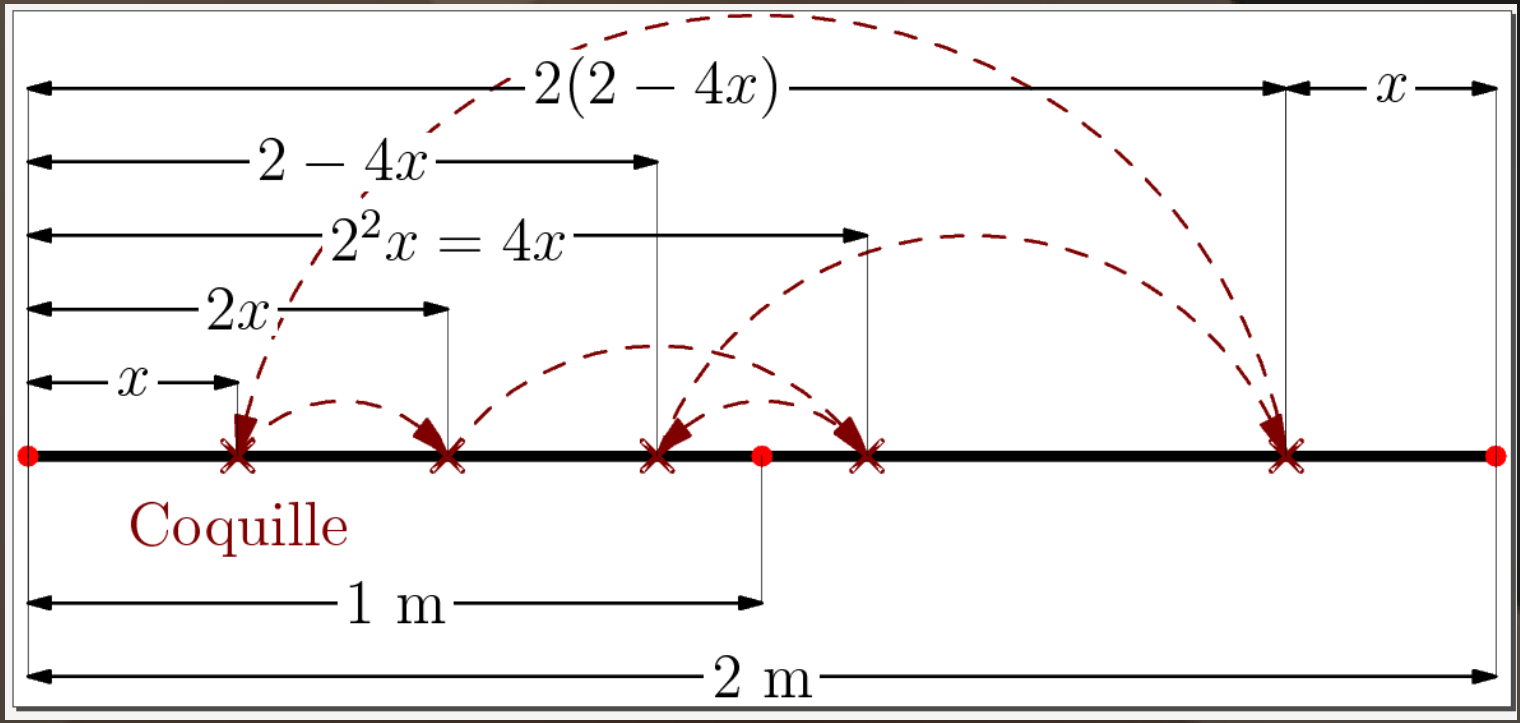
5. Notre première équation

- Soit *x* la distance en m qui sépare au départ la coquille d'œuf du bord.
- Vérifions : 2/9 m → 4/9 m → 8/9 m → 2/9 m.
- On retrouve donc bien nos trois solutions précédentes :
  - 2/9 m ;
  - 4/9 m ;
  - 8/9 m.

$$
\begin{aligned}
2^3 x &= 2 - x \\
8x &= 2 - x \\
8x + x &= 2 \\
9x &= 2 \\
x &= \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

5. Notre deuxième équation

- On a vu qu'il y avait aussi une autre solution ; c'est lorsque la coquille d’œuf se trouve au départ à 2/7 m du bord.
- On a donc essayé de trouver une autre équation, mais cette fois en faisant subir deux pliages à la coquille d’œuf.



5. Notre deuxième équation

- Soit *x* la distance en m qui sépare au départ la coquille d'œuf du bord.
- Vérifions : 2/7 m → 4/7 m → 6/7 m → 2/7 m.
- On retrouve donc bien les trois autres solutions :
  - 2/7 m ;
  - 4/7 m ;
  - 6/7 m.

$$
\begin{aligned}
2 - 2\left(2 - 2^2 x\right) &= x \\
2 - 2(2 - 4x) &= x \\
2 - 4 + 8x &= x \\
-2 + 8x &= x \\
8x - x &= 2 \\
7x &= 2 \\
x &= \frac{2}{7}
\end{aligned}
$$

6. Notre première équation généralisée

- On place la coquille d'œuf au départ suffisamment proche du bord pour qu'elle ne soit concernée que par le dernier pliage pour revenir à sa position initiale en n étapes.
- Soit *x* la distance en m qui sépare au départ la coquille d'œuf du bord.

$$2^n x = 2 - x$$

$$2^n x = 2 - x$$

$$2^n x + x = 2$$

$$(2^n + 1)x = 2$$

$$x = \frac{2}{2^n + 1}$$

6. Notre deuxième équation généralisée

- On place la coquille d'œuf au départ suffisamment proche du bord pour qu'elle ne soit concernée que par les deux derniers pliages pour revenir à sa position initiale en n étapes.
- Soit *x* la distance en m qui sépare au départ la coquille d'œuf du bord.

$$
\begin{aligned}
2-2\left(2-2^{n-1}x\right) &= x \\
2-4+2\times 2^{n-1}x &= x \\
-2+2^{n}x &= x \\
2^{n}x-x &= 2 \\
(2^{n}-1)x &= 2 \\
x &= \frac{2}{2^{n}-1}
\end{aligned}
$$

7. Des réponses à la deuxième question du chercheur

- On a donc trouvé dix positions de départ pour lesquelles la coquille d'œuf reviendra à sa position initiale en cinq étapes.

$$\frac{2}{2^5+1} = \frac{2}{33} \to \frac{4}{33} \to \frac{8}{33} \to \frac{16}{33} \to \frac{32}{33} \to \frac{2}{33}$$

$$\frac{2}{2^5-1} = \frac{2}{31} \to \frac{4}{31} \to \frac{8}{31} \to \frac{16}{31} \to \frac{30}{31} \to \frac{2}{31}$$

7. Des réponses à la deuxième question du chercheur

- On a donc aussi trouvé quatorze positions de départ pour lesquelles la coquille d'œuf reviendra à sa position initiale en sept étapes.

$$\frac{2}{2^7+1} = \frac{2}{129} \to \frac{4}{129} \to \frac{8}{129} \to \frac{16}{129} \to \frac{32}{129} \to \frac{64}{129} \to \frac{128}{129} \to \frac{2}{129}$$

$$\frac{2}{2^7-1} = \frac{2}{127} \to \frac{4}{127} \to \frac{8}{127} \to \frac{16}{127} \to \frac{32}{127} \to \frac{64}{127} \to \frac{126}{127} \to \frac{2}{127}$$

7. Des réponses à la deuxième question du chercheur

- On a donc aussi trouvé cent six positions de départ pour lesquelles la coquille d'œuf reviendra à sa position initiale en cinquante-trois étapes.
- On donne seulement deux d'entre elles.

$$\frac{2}{2^{53}+1} = \frac{2}{9\,007\,199\,254\,740\,993}$$

$$\frac{2}{2^{53}-1} = \frac{2}{9\,007\,199\,254\,740\,991}$$

8. Un début de réponse à la troisième question du chercheur

- Soit x la distance en m qui sépare au départ la coquille d'œuf du bord.
- Si x est une fraction, alors la coquille d'œuf après un certain nombre d'étapes tombe forcément dans un cycle puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de numérateurs.
- En effet, les positions de la coquille d'œuf sont des fractions plus petites que 1 qui ont toujours le même dénominateur.
- On peut donc supposer que les positions de départ de la coquille d'œuf pour lesquelles on ne repasse jamais par le même endroit ne sont donc pas des fractions comme les nombres suivants par exemple : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{1}{\pi}$

Fin

Collège

Jules-VERNE

Léna BARBET - 6°

Thaïs BEC - 6°

François CHARRIER - 6°

Paul DAHLAB - 6°

Collège

Marguerite-DE-VALOIS

Étienne CORNUAU – 3°

Louis NOURI - 3°