académie
Poitiers

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

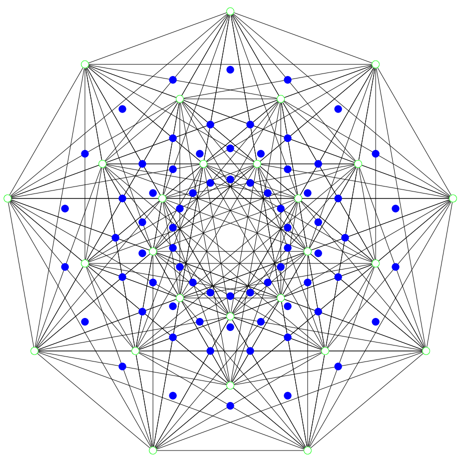
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2009

Classes de Première

Énoncés et corrigés des exercices



Cellule académique des olympiades de mathématiques — Mai 2009

Table des matières

Ce document est composé avec LaTeX, les figures réalisées avec METAPOST.

A

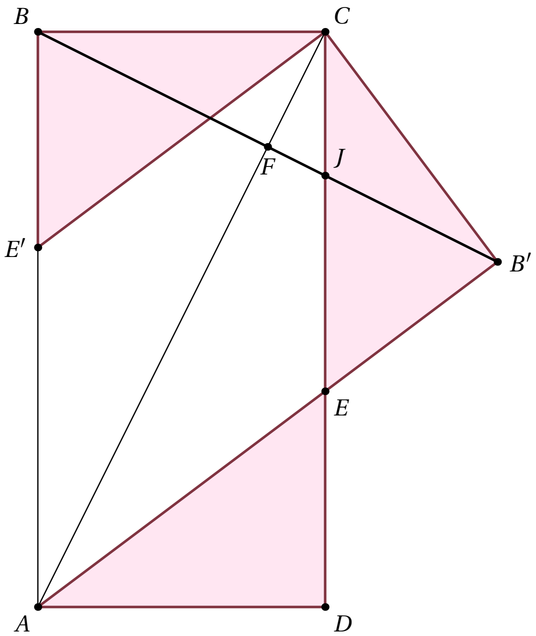
Exercice 1 (toutes séries)

On plie une feuille de papier rectangulaire le long de l'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.
On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).
L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1. Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

   On pourra noter c la longueur du côté du losange.

   Les questions suivantes sont indépendantes.
2. Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du côté du losange.
3. On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
   Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?
4. À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
   Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.
5. Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.



1. Découpage...
2. Sachant que $AE'CE$ est un losange on a :

$$(16-c)^2 + 8^2 = c^2 \quad \text{soit} \quad c = 10.$$

3. On a nécessairement : $(L-7,5)^2 + l^2 = 7,5^2$ avec $L \geqslant 8$. Soit $l^2 = L(15-L)$, d'où les seules réponses entières : $L = 12$ et $l = 6$.
Ces deux dimensions conduisent bien à un losange de côté 7,5 cm.

4. Sachant que $AE'CE$ est un losange, on a $ED = E'B$ donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.
D'où l'égalité : $(L-c)l = 0,25Ll$, d'où $c = 0,75L$, d'où $L^2 = 2l^2$, d'où $l = \frac{\sqrt{2}}{2}L$.

5. Le pliage correspond à une symétrie d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de $CB'E$).
La symétrie assure les égalités des longueurs : $CE' = CE$ et $AE = AE'$.

Les côtés (AE') et (CE) sont parallèles. Les côtés (AE) et (CE'), qui sont leurs images par la symétrie d'axe (AC), le sont également. Le quadrilatère $(AECE')$ est un parallélogramme ayant ses quatre côtés de même longueur donc un losange.

Remarque : Sauf dans le cas où la figure de départ est un carré (identique à la figure d'arrivée, donc un losange), la figure $CB'E$ est bien un triangle extérieur au rectangle $ABCD$, c'est-à-dire la partie enlevée.
Il suffirait de dire que $FJ < FB'$ car le triangle AJC a une aire inférieure au triangle ABC, triangles de même base et dont les hauteurs sont classées dans l'ordre souhaité.

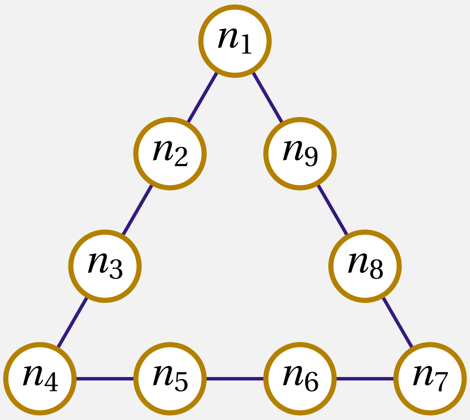
B

Exercice 2 (toutes séries)

Partie A : Qestions préliminaires :
On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

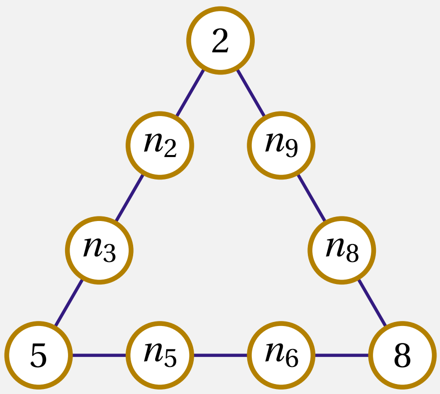
1. Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2. Quelle est la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :
On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.
C'est-à-dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$.
On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1. Complèter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2. On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   (a) Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
   (b) En déduire qu'on a $17 \leqslant S \leqslant 23$.
   (c) Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.

3. Proposer un triangle 17-magique.
4. Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
5. (a) Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.

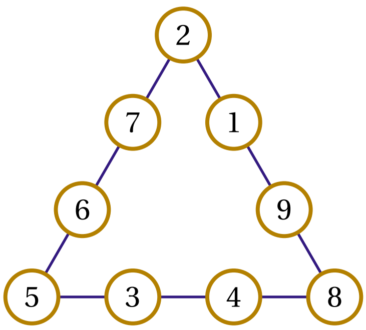
   (b) Proposer un triangle 18-magique.
6. Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40-S)$-magique.
7. Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

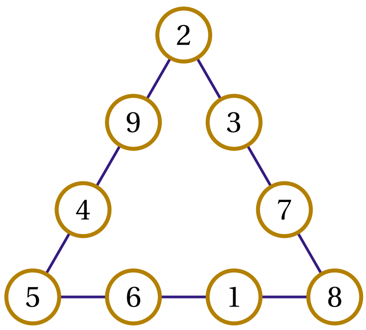
Questions préliminaires

1. Plus petite valeur : 6 $(= 1+2+3)$
2. Plus grande valeur : 24 $(= 7+8+9)$

Triangles magiques

1. Voici deux manières de compléter le triangle donné en un triangle 20-magique.





2. (a) On *somme* les trois côtés.

$$\begin{aligned} 3S &= (n_1+n_2+n_3+n_4)+(n_4+n_5+n_6+n_7)+(n_7+n_8+n_9+n_1) \\ &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T \\ &= 45+T. \end{aligned}$$

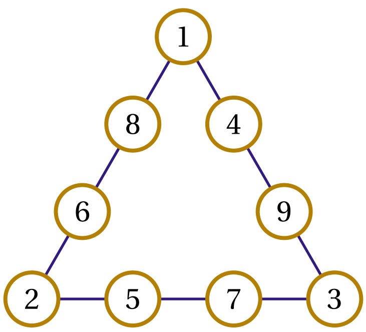
   (b) En utilisant l'encadrement de T obtenu dans les questions préliminaires :

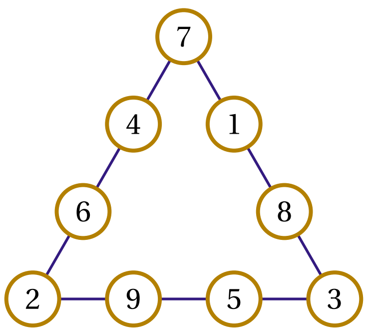
$$17 = \frac{6+45}{3} \leqslant S \leqslant \frac{24+45}{3} = 23.$$

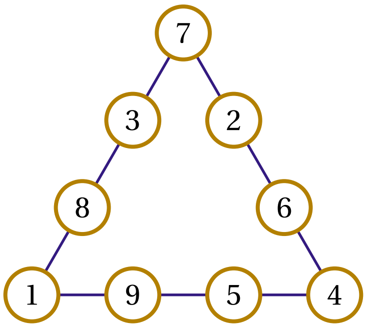
   (c) Il suffit de considérer les valeurs possibles pour S et d'en déduire les valeurs de T associées. Les couples envisageables sont :

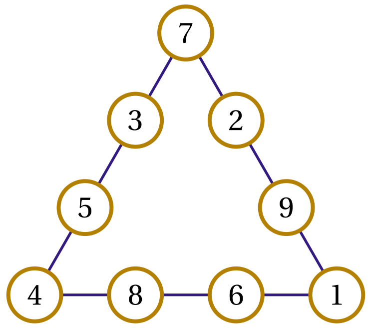
$$(17,6)\ (18,9)\ (19,12)\ (20,15)\ (21,18)\ (22,21)\ (23,24)$$

3. Voici des triangles 17-magiques (un seul était demandé) :









4. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

   Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.

   Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. on aurait alors $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

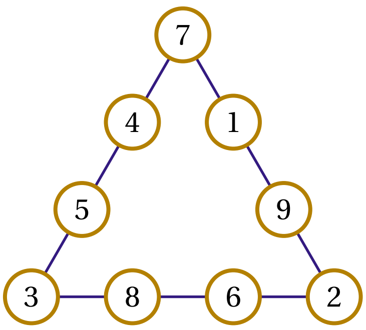
   Il n'existe pas de triangle magique tel que $S = 18$. (On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5. (a) Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.

   Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1+n_2+n_3+n_4 = 19$, d'où $n_1+n_3+n_4 = 12$. Or $T = n_1+n_4+n_7 = 12$. Par suite $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

   7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

   (b) Voici un triangle 19-magique.



6. Si on remplace chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

   S'il existe un triangle S-magique, il en existe un qui soit $(40 - S)$-magique !

7. Les valeurs de S pour lesquelles on peut trouver un triangle S-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).

   Il n'y a pas de triangle 18-magique, et donc pas non plus de triangle 22-magique.

C

Exercice 3 (toutes séries)

Explicitez les calculs et raisonnements qui justifient le dialogue suivant où tous les nombres envisagés sont des entiers naturels.
— Quel est le reste de la division par 7 d'un carré ?
— Hum, on doit pouvoir s'en sortir en étudiant un nombre limité de cas...
— Si la somme de deux carrés est divisible par 7 alors les deux carrés sont, eux-mêmes, divisibles par 7 !
— Entendu, ils sont d'ailleurs tous divisibles par 49 !
— Au fait, 2009 est la somme de deux carrés !
— C'est vrai !
— On peut voir les choses autrement en considérant quatre nombres a, b, c et d. Si on développe l'expression

$$(ab-cd)^2+(ac+bd)^2$$

on constate que c'est le produit de deux facteurs...
— Oui, c'est épatant ! Cela porte un nom ?
— On dit que c'est la formule de LAGRANGE, elle est très utile. Prends 1105, c'est le produit de 3 nombres qui sont eux mêmes sommes de deux carrés !
— En effet, et grâce à la formule précédente, le produit de deux de ces facteurs est aussi la somme de deux carrés... Cela fait beaucoup de possibilités pour écrire 1105 comme somme de deux carrés !
— Tu en trouveras 4 !
— C'est fait. Et 2009, a-t-il aussi plusieurs décompositions en somme de deux carrés ?
— Tu peux utiliser la formule de LAGRANGE, mais cela ne donne qu'une seule décomposition.
— C'est normal, il n'y en a pas d'autres !

— Quel est le reste de la division par 7 d'un carré ?
C'est un nombre entier compris entre 0 et 6...
— Hum, on doit pouvoir s'en sortir en étudiant un nombre limité de cas...
En calculant les carrés de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, on trouve les restes suivants dans la division par 7 : 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Ensuite on retrouve périodiquement les mêmes restes. En effet si on ajoute 7 à un nombre, on ne change pas le reste de la division par 7 de son carré, auquel on a ajouté un multiple de 7 :

$$(n+7)^2 = n^2+14n+49 \text{ et } 7 \text{ divise } 14n+49.$$

Les seuls restes possibles sont donc 0, 1 ,2, 4.
— Si la somme de deux carrés est divisible par 7 alors les deux carrés sont, eux-mêmes, divisibles par 7 !
Si la somme de deux carrés est divisible par 7, c'est que la somme des restes dans la division par 7 est elle-même divisible par 7. Si on combine ainsi les différents restes possibles, il n'y a qu'une seule façon possible d'obtenir 7 ou 0, c'est de faire $0+0$!
Cela signifie que les deux carrés sont divisibles par 7.
— Entendu, ils sont d'ailleurs tous divisibles par 49 !
Oui puisque si le carré d'un nombre est divisible par 7, le nombre lui-même est divisible par 7. Le carré, en conséquence, est divisible par 49.
— Au fait, 2009 est la somme de deux carrés !

2009 est divisible par 49 car $2009 = 49 \times 41$ et 41 est la somme de deux carrés : $41 = 25 + 16$. Donc 2009 est bien la somme deux carrés :

$$2009 = 49 \times 25 + 49 \times 16 = 35^2 + 28^2.$$

— C'est vrai !
Et même, compte tenu de ce qui a été dit il semblerait bien que cette décomposition soit unique !
— On peut voir les choses autrement en considérant quatre nombres a, b, c et d. Si on développe l'expression

$$(ab - cd)^2 + (ac + bd)^2$$

on constate que c'est le produit de deux facteurs...
On a :

$$\begin{aligned}(ab - cd)^2 + (ac + bd)^2 &= a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2 + 2abcd + b^2d^2 \\ &= a^2b^2 + a^2c^2 + c^2d^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + d^2)(b^2 + c^2)\end{aligned}$$

Cela mérite d'être encadré !

$$\boxed{(ab - cd)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + d^2)(b^2 + c^2)}$$

— Oui, c'est épatant ! Cela porte un nom ?
— On dit que c'est la formule de LAGRANGE, *elle est très utile. Prends 1105, c'est le produit de 3 nombres qui sont eux mêmes sommes de deux carrés !*
On a $1105 = 5 \times 13 \times 17$ puis $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$ et $17 = 4^2 + 1^2$.
— En effet, et grâce à la formule précédente, le produit de deux de ces facteurs est aussi la somme de deux carrés... Cela fait beaucoup de possibilités pour écrire 1105 comme somme de deux carrés !
1105 est le produit de trois facteurs qui sont sommes de deux carrés. En commençant par transformer le produit de deux d'entre eux en une somme de deux carrés avec la formule de LAGRANGE il restera effectuer à la transformation finale du produit de cette somme avec le troisième facteur. Comme il est possible de regrouper différemment les trois facteurs, nous pouvons envisager différentes décompositions. D'autant plus que les décompositions vont aussi dépendre de l'ordre dans lequel nous écrirons les décompositions intermédiaires !
— Tu en trouveras 4 !
Il peut être intéressant d'utiliser une *notation* pour simplifier l'application de la formule de LAGRANGE.
Nous noterons $a \bullet b = a^2 + b^2$. Ainsi, conformément à LAGRANGE :

$$\begin{aligned}5 \times 13 &= (1 \bullet 2) \times (2 \bullet 3) = 4 \bullet 7 \\ &= (2 \bullet 1) \times (2 \bullet 3) = 1 \bullet 8 \\ (5 \times 13) \times 17 &= (4 \bullet 7) \times (1 \bullet 4) = 24 \bullet 23 \\ &= (7 \bullet 4) \times (1 \bullet 4) = 9 \bullet 32 \\ &= (1 \bullet 8) \times (1 \bullet 4) = 31 \bullet 12 \\ &= (8 \bullet 1) \times (1 \bullet 4) = 4 \bullet 33\end{aligned}$$

Nous en avons déjà 4... Si nous partons de $(5 \times 17) \times 13$ ou de $(13 \times 17) \times 5$ nous retrouvons les mêmes.

$$\boxed{1105 = 24^2 + 23^2 = 9^2 + 32^2 = 31^2 + 12^2 = 4^2 + 33^2}$$

— C'est fait. Et 2009, a-t-il aussi plusieurs décompositions en somme de deux carrés ?
— Tu peux utiliser la formule de LAGRANGE*, mais cela ne donne qu'une seule décomposition.*
On a : $2009 = 49 \times 41$, cette factorisation étant la seule dont les facteurs sont somme de deux carrés : $49 = 0^2 + 7^2$, $41 = 4^2 + 5^2$. L'identité de LAGRANGE nous permet d'écrire :

$$2009 = 49 \times 41 = (0 \bullet 7) \times (4 \bullet 5) = 35 \bullet 28$$

On obtient la même décomposition si on échange 0 et 7 dans la décomposition de 49.
— C'est normal, il n'y en a pas d'autres !
Comme on l'a vu au début, sachant que 2009 est divisible par 7, la décomposition de 2009 en somme de deux carrés sera factorisable par 49. Autrement dit la décomposition de 2009 en somme de deux carrés se réduit à la décomposition de 41 en somme de deux carrés. Il suffit alors de retrancher à 41 tous les carrés inférieurs à 41 pour vérifier si ce qui reste est un carré ; on ne trouve qu'une seule possibilité : $41 = 25 + 16$!

D

Exercice 4 (série S)

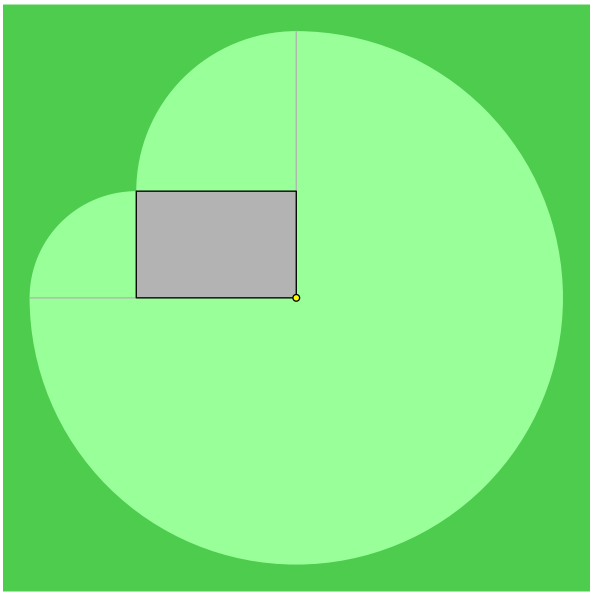
La chèvre de Monsieur Seguin

L'herbe est bien haute autour de la bergerie de Monsieur Seguin. Il faudrait tondre. Blanquette, son inséparable chèvre, va s'en charger. Monsieur Seguin l'attache au bout d'une corde et fixe l'autre bout de la corde à un piquet planté **le long d'un des murs** de la bergerie. La chèvre peut ainsi brouter toutes les herbes que la corde lui permet d'atteindre. La base de la bergerie est un rectangle de 6 m de long sur 4 m de large, et la longueur de la corde disponible pour les mouvements de la chèvre est de 10 m. On suppose que le terrain est bien plan et on assimile le piquet et la chèvre à des points.

1. Calculer l'aire exacte que peut brouter Blanquette si monsieur Seguin plante son piquet à l'un des coins de la bergerie.
2. Montrer que monsieur Seguin doit justement placer son piquet à l'un de ces coins s'il veut que Blanquette broute une aire maximale.

1. Quand le piquet est planté à un coin de la bergerie, la chèvre peut brouter l'aire :

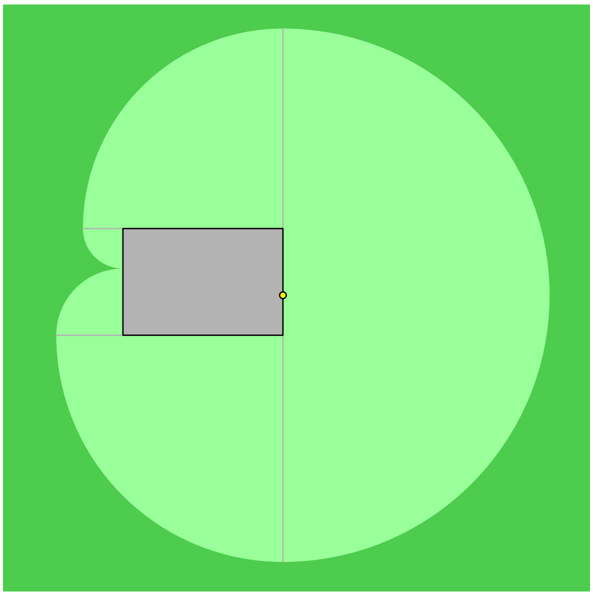
$$\frac{3}{4}\pi 10^2 + \frac{1}{4}\pi 4^2 + \frac{1}{4}\pi 6^2 = 88\pi.$$



2. Si le piquet est planté sur une largeur de la bergerie à une distance x d'un des deux coins, l'aire que la chèvre peut brouter est

$$\frac{1}{2}\pi 10^2 + \frac{1}{4}\pi(10-x)^2 + \frac{1}{4}\pi(4-x)^2 + \frac{1}{4}\pi(6+x)^2 + \frac{1}{4}\pi x^2 = (88 + x(x-4))\pi \leqslant 88\pi,$$

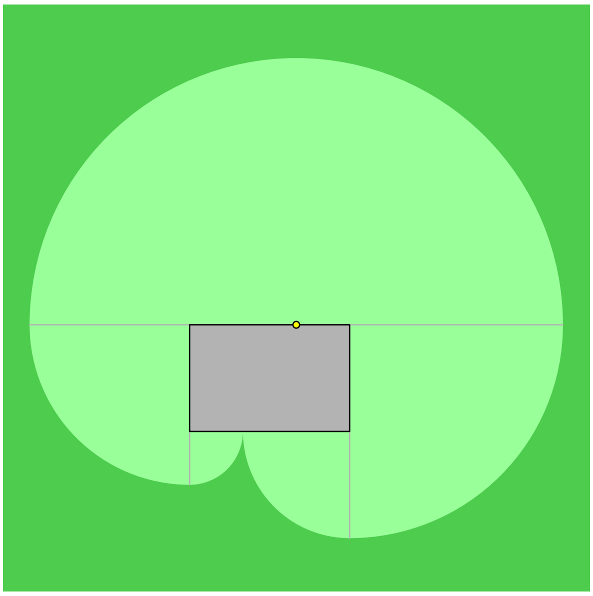
car pour $0 \leqslant x \leqslant 4$, $x(x-4) \leqslant 0$.



Si le piquet est planté sur une longueur de la bergerie à une distance y d'un des deux coins, l'aire que la chèvre peut brouter est

$$\frac{1}{2}\pi 10^2+\frac{1}{4}\pi(10-y)^2+\frac{1}{4}\pi(6-y)^2+\frac{1}{4}\pi(4+y)^2+\frac{1}{4}\pi y^2=\pi(88+y(y-6))\ \leqslant 88\pi$$

car pour $0\leqslant y\leqslant 6,\ y(y-6)\leqslant 0$.



Dans tous les cas l'aire est inférieure à celle que la chèvre peut brouter lorsque le piquet est planté à l'un des coins de la bergerie !

E

Exercice 4 (autres séries)

Les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG, ST2S avaient le choix de traiter l'exercice 4 de la série S ou bien l'exercice suivant :

Les quatres fille du docteur Marc
Les quatre filles du Dr Marc sont toutes nées un 14 mars. Aujourd'hui c'est le jour de l'anniversaire collectif et, pour la première fois, le nombre de diviseurs de l'âge de l'ainée est strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge de la deuxième, qui est lui-même strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge de la troisième, qui est bien sûr strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge de la plus jeune.

1. Quel est, au minimum, l'âge de l'ainée des quatre sœurs Marc ?
2. En supposant que l'ainée ait bien l'âge minimum demandé dans la première question, dans combien d'années cette curieuse situation se reproduira-t-elle pour la première fois ? (à condition, évidemment, que les quatre sœurs vivent jusqu'à ce moment.)

Les cinq fils du docteur April
Les cinq fils du Dr April sont tous nés un 1er avril. Lors de leur anniversaire collectif, le 1/4/2005, leur père s'est exclamé : « Les différences d'âge entre deux quelconques d'entre eux sont toutes différentes ! ».

1. Quel est, au minimum, l'âge de l'ainé des cinq frères April ?
2. En supposant que l'ainé ait bien l'âge minimum demandé dans la première question, dans combien d'années au minimum aucun des cinq âges ne sera-t-il un nombre premier ?

Les quatre filles du docteur Marc

1. L'âge de l'ainée ayant au moins 2 diviseurs, celui de la benjamine en a au moins 5.
   Le plus petit entier naturel ayant au moins 5 diviseurs est 12 (6 diviseurs). Il conduit aux deux solutions :
   — 12 ans (6 diviseurs)
   — 16 ans (5 diviseurs)
   — 21 ou 22 ans (4 diviseurs)
   — 23 ans (2 diviseurs)
   Dans les deux cas, l'âge de l'ainée est 23 ans.
2. Il faut, de façon analogue, que le nombre de diviseurs de $12 + n$ soit au moins égal à 5. La plus petite valeur de n qui convienne est 24 avec les âges correspondants :
   — 36 ans (9 diviseurs)
   — 40 ans (8 diviseurs)
   — 45 ou 46 ans (6 ou 4 diviseurs)
   — 47 ans (2 diviseurs)
   Cette situation se reproduira donc dans 24 ans, le 11 mars 2033.

Les cinq fils du docteur April

1. Entre les cinq âges, il y a 10 différences qui doivent être toutes différentes, et non nulles. La plus grande d'entre elles est donc au moins égale à 10. Le plus jeune ayant au moins 1 an, l'aîné a au moins 11 ans, mais il est impossible de parvenir à des différences satisfaisantes avec cette valeur, comme avec la suivante 12. En revanche, avec 13 ans pour l'aîné, on parvient aux deux répartitions symétriques :

   1 an, 2 ans, 4 ans, 8 ans, 13 ans et 1 an, 6 ans, 10 ans, 12 ans, 13 ans.

   Dans ces deux cas, les différences sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12.

   L'âge de l'aîné est donc, au minimum 13 ans.

2. Selon qu'on choisira un nombre d'années n pair ou impair, les fils à tester seront ceux dont l'âge actuel est de parité opposée (hormis le cas $n = 1$, à disqualifier immédiatement).

   La plus petite valeur qui convienne est, dans les deux cas, $n = 8$, avec les âges :

   9 ans, 10 ans, 12 ans, 16 ans et 21 ans ou 9 ans, 14 ans, 18 ans, 20 ans et 21 ans.

   Cette situation se produira 8 ans plus tard, le 1er avril 2016.