POITIERS

Premier exercice

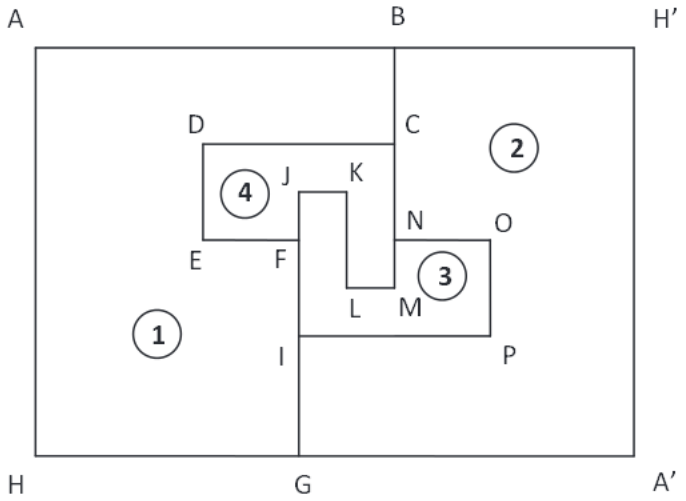
Toutes séries

Pavages

Énoncé

Le rectangle AH'A'H ci-dessous est pavé par quatre pièces numérotées 1, 2, 3 et 4, **toutes de même forme** et il y a seulement deux tailles de pièce. Les grandes pièces 1 et 2 sont identiques de même que les pièces 3 et 4. Il y a donc proportionnalité entre les côtés correspondants des grandes pièces et des petites pièces.

Pour des raisons esthétiques on impose $FG = \frac{AH}{2}$.



1. Pourquoi a-t-on obligatoirement $BC = DE$?
2. Si $AH = 8$ et $HG = 4$, que valent les autres côtés de la pièce 1 ? Donner aussi les longueurs des côtés de la pièce 4.
3. Même question que la précédente avec $AH = 8$ et $AB = 9$.
4. Si les dimensions du rectangle AH'A'H sont $AH' = 13$ et $AH = 12$, que valent les côtés des pièces 1 et 4 ?
5. Peut-on paver un carré de la sorte ? Justifier la réponse.

(*Idée tirée de l'article de Michael Reid « Tiling similar with polyominoes ». Source Internet.*)

Éléments de solution

1. Les pièces 3 et 4 sont identiques donc $JK = LM$. Sur la pièce 1, qui est un agrandissement de ces pièces on retrouve donc l'égalité $BC = DE$.
2. D'après la question précédente on a $BC = DE = \frac{FG}{2} = \frac{AH}{4} = 2$. Les cotés [HG] de longueur 4 et [DE] de longueur 2 sont des côtés correspondants pour les pièces 1 et 4. Les longueurs des petites pièces sont donc la moitié de celles des grandes pièces.

On a alors $EF = \frac{FG}{2} = 2, JF = \frac{EF}{2} = 1, DC = \frac{AH}{2} = 4, JK = LM = \frac{FE}{2} = 1, LK = \frac{DC}{2} = 2$, et comme $AB = HG = EF + DC = 4 + 2 + 4 = 6, CM = \frac{AB}{2} = 3$.

3. D'après la question 1) on a $BC = DE = \frac{FG}{2} = \frac{AH}{4} = 2$. Notons k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces.
   On sait que $FG = \frac{AH}{2}$ donc $EF = \frac{DC}{2}$.
   On a donc $AB = 9 = HG = EF + DC = HG + EF = \frac{DE}{k} + kFG = \frac{2}{k} + 4k$. Soit maintenant à résoudre $4k^2 - 9k + 2 = 0$ dont les deux solutions sont $\frac{1}{4}$et 2.
   On cherche $k < 1$, on retient donc $k = \frac{1}{4}$. On trouve alors $HG = 4DE = 8, EF = \frac{FG}{4} = 1$, $DC = \frac{AH}{4} = 2, JK = LM = \frac{BC}{4} = 0,5, LK = \frac{DC}{4} = 0,5, JF = \frac{EF}{4} = 0,25$, $CM = \frac{AB}{4} = 2,25$.
4. On a $FG = \frac{AH}{2} = 6, DE = BC = \frac{AH}{4} = 3$.
   Si on note k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces on a $HG = \frac{DE}{k} = \frac{3}{k}, DC = kAH = 12k, EF = \frac{DC}{2} = 6k$. Comme $AB = HG = EF+DC = \frac{3}{k} = 6k+12k = \frac{3}{k}+6k$ alors $AH' = AB+BH' = \frac{3}{k}+6k+\frac{3}{k} = 6(k+\frac{1}{k}) = 13$. Soit donc à résoudre l'équation $k^2 - \frac{13k}{6} + 1 = 0$. On trouve deux solutions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$. Comme $k < 1$, on retient $k = \frac{2}{3}$. On trouve maintenant $HG = 4,5, DC = 8, EF = 4, JK = LM = \frac{EF}{2} = 2$, $AB = AH' = HG = 8,5, JF = kEF = \frac{8}{3}, KL = kDC = \frac{16}{3}, CM = kAB = \frac{17}{3}$.
5. Supposons que $AH' = AH = c$. Notons $HG = a, AB = b, DC = d$ et k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces.
   On a donc $0 < k < 1$. On a par hypothèse $a + b = c$, on a déjà vu que $a + \frac{d}{2} = b, d = kc$ et $\frac{c}{4} = ka$.
   Des deux premières équations on tire $c = a = a + \frac{d}{2}$ et en utilisant ensuite les deux dernières équations $2a = \frac{2c}{4k} = c - \frac{d}{2} = c - \frac{kc}{2}$. D'où $\frac{c}{2k} = c(1 - \frac{k}{2})$. Puisque c n'est pas nul on doit avoir $\frac{1}{2k} = 1 - \frac{k}{2}$ et après manipulations élémentaires $k^2 - 2k + 1 = 0$ dont on sait que l'unique solution est 1. Comme k doit être inférieur à 1, il n'est pas possible de paver de la sorte un carré.

Retour au sommaire

POITIERS

Deuxième exercice

Série S

Une fonction sur les entiers

Énoncé

Soit N_{1000} l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 999.
On définit sur N_{1000} la fonction F de la manière suivante : si n appartient à N_{1000}, on remplace chaque chiffre a de l'écriture décimale de n par $2a+2$, qui est un nombre à un ou deux chiffres. Le nombre $F(n)$ est alors obtenu en écrivant à la suite ces nombres.

Par exemple, si $n = 3$, il y a un seul chiffre $a = 3$ qui est remplacé par $2 \times 3 + 2 = 8$. Donc $F(3) = 8$.

Si $n = 47$, on remplace le chiffre 7 par $2 \times 7 + 2 = 16$, le chiffre 4 par $2 \times 4 + 2 = 10$, donc $F(47) = 1016$ (10 suivi de 16).

De même, $F(526) = 12614$ (12 suivi de 6 suivi de 14).

1. Calculer $F(857)$.
2. On suppose, dans cette question seulement, que n est un nombre à deux ou trois chiffres : $n = cdu$ (u est le chiffre des unités, d est celui des dizaines et c celui des centaines). On note n' le nombre à un ou deux chiffres cd obtenu en retirant de l'écriture de n le chiffre des unités.

   Par exemple, si $n = 47, n' = 4$; si $n = 247, n' = 24$.

   Montrer que $F(n) = 10F(n') + F(u)$ ou $F(n) = 100F(n') + F(u)$. Préciser, en fonction de la valeur de u, quelle égalité on doit utiliser.
3. Montrer que l'équation $F(n) = 3n$ a trois solutions.
   Indication : Commencer par déterminer le chiffre u des unités de n, puis chercher n'...
4. L'équation $F(n) = 5n$ a-t-elle des solutions ?
5. Résoudre l'équation $F(n) = 23n$.

Éléments de solution

1. $F(857) = 181216$.
2. Supposons que c est non nul (le raisonnement est analogue et plus vite écrit si $c = 0$). Notons $U = 2u+2$, $D = 2d+2$ et $C = 2c+2$. Les nombres C, D et U ont un ou deux chiffres et le nombre $F(n)$ s'écrit CDU qui peut avoir entre trois et six chiffres.
   Supposons par exemple que C et D ont respectivement pour écriture décimale c_1c_2 et d_1d_2. Si U a un seul chiffre u_1, l'écriture décimale de $F(n)$ est $c_1c_2d_1d_2u_1$. Ce nombre vaut $10 \times c_1c_2d_1d_2 + u_1$. Vu la définition de F, $c_1c_2d_1d_2$ est l'écriture décimale de $F(n')$ et u_1 celle de $F(u)$. On a donc $F(n) = 10F(n') + F(u)$.
   Si U a deux chiffres u_1u_2, le nombre $F(n)$ s'écrit

   $$F(n) = c_1c_2d_1d_2u_1u_2 = 100 \times c_1c_2d_1d_2 + u_1u_2 = 100 \times F(n') + F(u).$$

   Ceci prouve le résultat demandé. La première formule s'applique quand $2u+2$ n'a qu'un chiffre ; c'est-à-dire quand $0 \leqslant u \leqslant 3$, la deuxième quand il a deux chiffres, pour $4 \leqslant u \leqslant 9$.
3. *Premier cas* : si n n'a qu'un chiffre, $F(n) = 2n+2$ et vaut $3n$ si et seulement si $n = 2$.

   Deuxième cas : si n a deux chiffres : $n = du$, le chiffre des unités de $F(n)$ est le chiffre des unités de $2u+2$. Le chiffre des unités de $3n$ est le chiffre des unités de $3u$. En écrivant côte-à-côte ces deux

chiffres des unités pour $u = 0, 1, \ldots, 9$, on constate qu'ils ne prennent la même valeur que pour $u = 2$.
D'après la question précédente, on a donc

$$F(n) = 10F(n') + F(2) = 10F(n') + 6 = 3n = 30n' + 6.$$

(car le nombre qui s'écrit $n'2$ vaut $10n' + 2$).
On en conclut que $F(n') = 3n'$ et donc $n' = 2$ d'après le premier cas. On a donc, dans ce cas, $n = 22$.

Troisième cas : si $n = cdu$ a trois chiffres, comme ci-dessus, $u = 2$ et $F(n) = 10F(n') + F(2)$ et le même calcul montre que $F(n') = 3n'$. Le nombre n' est donc un nombre à deux chiffres tel que $F(n') = 3n'$. Donc $n' = 22$ d'après le deuxième cas et $n = 222$.

4. Comme au-dessus, le chiffre des unités de $F(n)$ est le chiffre des unités de $2u + 2$, celui de $5n$ est le chiffre des unités de $5u$. La seule possibilité est $u = 4$ (liste comparative...). Comme $F(4) = 10 / 5 \times 4$, le nombre n ne peut valoir 4 et on peut écrire

$$F(n) = 100F(n') + F(4)$$

(notation et résultat de la question 2). On a donc $n = 10n' + 4$ et $F(n) = 100n' + 10$ donc

$$100F(n') + 10 = 5 \times (10n' + 4) = 50n' + 20$$

soit

$$10F(n') + 1 = 5n' + 2.$$

Le chiffre des unités du membre de gauche vaut 1. Celui de $5n'$ vaut 0 ou 5, donc celui du membre de droite vaut 2 ou 7. Ils ne peuvent être égaux et l'égalité est donc impossible.

L'équation $F(n) = 5n$ n'a donc pas de solution.

5. On observe d'abord que n a forcément au moins deux chiffres (sinon $F(n) = 2n + 2$ qui ne peut valoir $23n$). On écrit donc $n = 10n' + u$. Le chiffre des unités de $F(n)$ est comme ci-dessus celui de $2u + 2$, et celui de $23n$ est celui de $3u$. On a vu à la question 3 que la seule possibilité est $u = 2$. On a donc

$$F(n) = 10F(n') + F(2) = 10F(n') + 6 = 23(10n' + 2) = 230n' + 46$$

soit $F(n') = 23n' + 4$. Là encore il n'y a pas de solution avec un nombre n' à un chiffre. Donc $n' = 10c + d$ et le chiffre des unités de $F(n')$ est celui de $2d + 2$, alors que le chiffre des unités de $23n' + 4$ est le chiffre des unités de $3d + 4$. Ceci implique que $d = 8$ (toujours avec une liste comparative). On a donc $n' = 10c + 8$ et on conclut grâce à la question 2 que

$$F(n') = 100F(c) + F(8) = 100F(c) + 18.$$

On a aussi $F(n') = 23(10c + 8) + 4 = 230c + 188$. Finalement $100F(c) + 18 = 230c + 188$, soit $10F(c) = 23c + 17$. Comme c est un nombre à un chiffre, $F(c) = 2c + 2$ et l'égalité devient $20c + 20 = 23c + 17$, soit $c = 1$.

L'unique solution de l'équation $F(n) = 23n$ est donc $n = 182$.

Retour au sommaire

POITIERS

Troisième exercice

Séries autres que S

Robinson

Énoncé

Robinson, oublié sur son île, occupe son lundi après-midi d'été en traçant des nombres (des entiers naturels) sur le sable. Il écrit le nombre qu'il a choisi, puis, en dessous il écrit le nombre suivant qui doit décrire la composition en chiffres du nombre qu'il vient d'écrire en comptant le nombre d'apparitions des différents chiffres de 9 à 0 (dans cet ordre).
Par exemple, si le nombre choisi par Robinson est 2040, ce nombre est composé d'un 4, un 2, deux 0 (on énumère les chiffres de 2040 dans l'ordre décroissant), ce qui signifie que Robinson va tracer en dessous le nombre un-4-un-2-deux-0, c'est-à-dire : 141220.
Vous pouvez vérifier que le troisième nombre sera 14222110.

1. Quel sera le quatrième nombre tracé par Robinson ?
2. Robinson continue à rainurer le sable puis constate qu'après quelques étapes supplémentaires, il écrit toujours le même nombre. Lequel ?
3. Le mardi, la nuit ayant porté conseil et la marée ayant effacé la plage, Robinson choisit un nouveau nombre de telle sorte que le nombre suivant soit égal au premier. Il vérifie avec satisfaction que ce nombre est même le plus petit possible à posséder cette propriété. Quel est ce nombre ?
4. Le mercredi, Robinson trace une colonne de quatre nombres, mais une vague recouvre les trois premiers. Le quatrième est son année de naissance : 1632. Quel était le premier ? Comme il y a de nombreuses solutions, donnez simplement la plus petite et la plus grande d'entre elles et déterminez le nombre de solutions.
5. Le jeudi, Robinson trace un premier nombre (notons-le a), puis le nombre suivant (notons-le b, qui est différent de a), mais quand il écrit le troisième, il constate avec émerveillement qu'il est identique au nombre a. Combien vaut a ?
   Cette question a plusieurs solutions, mais serez-vous capable de trouver la plus petite valeur possible du nombre a ?

Le vendredi, Robinson trouve une trace de pas dans le sable ...

Éléments de solution

1. Le quatrième nombre tracé est 14323110.
2. On retrouve toujours le même nombre : 1433223110.
3. Mardi : le nombre tel que le second soit égal au premier est 22.
4. Mercredi : la plus petite valeurs : 22222266
   la plus grande valeurs : 66666622
   Il y a 56 solutions
5. Jeudi : La plus petite valeur de a : 152413423110.

Le vendredi, Robinson trouve une trace de pas dans le sable ...

Retour au sommaire