

Les deux exercices nationaux des Olympiades 2008

Exercice 1:

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

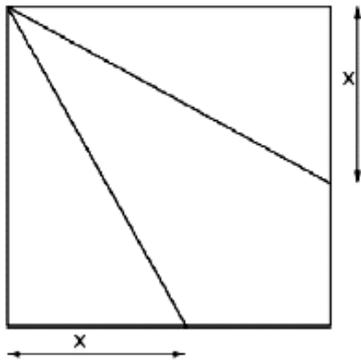
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

- $2 = 1+1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).
- $3 = 1+2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$, $3 = 1+1+1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

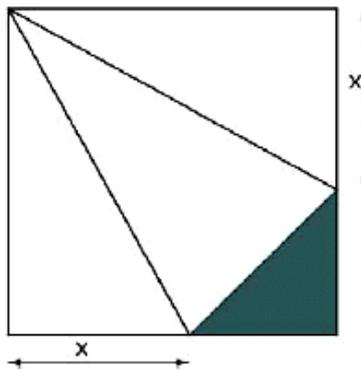
1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
 2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
 3. Montrer que si n est « bon », alors $2n+2$ et $2n+9$ sont « bons ».
 4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
- Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Exercice 2:



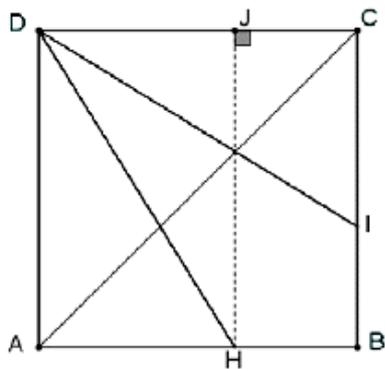
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire grisée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?