académie Poitiers

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2010

Classes de Première

Corrigés des exercices

Ce document propose un corrigé des trois exercices *régionaux* des *Olympiades académiques de mathématiques* qui en comportait cinq, deux étant *nationaux*.

Tous les candidats étaient invités à résoudre l'exercice « **La Fiac** » (page 2), ceux de première L ou ES ayant à traiter ensuite « **À bicyclette** » (page 4) et ceux de première S « **Des suites de Fibonacci** » (page 5).

Cellule académique des olympiades de mathématiques — Juin 2010

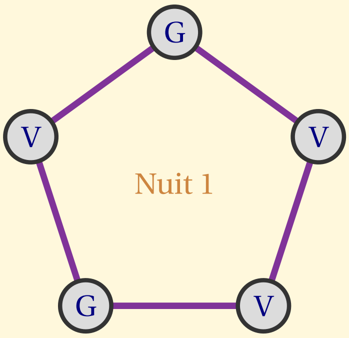
La Fiac

La *Foire Internationale de l'Automate Cellulaire* se compose de plusieurs bâtiments polygonaux. À chaque sommet de ces polygones, il y a un poste de garde. Chaque soir un poste de garde peut être occupé, ou non, par un gardien. La première nuit, le Directeur de la FIAC décide quels postes vont être occupés. Puis la répartition des gardiens se fait ainsi :

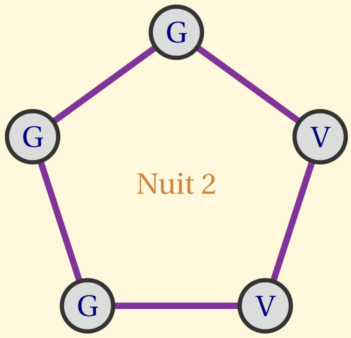
– Si lors de la nuit n, les deux sommets adjacents à un poste étaient tous deux vacants, ou tous deux occupés, alors ce poste sera occupé lors de la nuit suivante $n+1$.
– Si, au contraire, lors de la nuit n, les deux sommets adjacents à un poste étaient l'un occupé et l'autre non, alors ce poste ne sera pas occupé lors de la nuit $n+1$.

Exemple : Le bâtiment A est un pentagone.

Le directeur décide de la disposition suivante :



La nuit suivante, on obtient la configuration :



On convient de noter G les postes occupés par un gardien et V les postes vacants.

1/ Déterminer les configurations obtenues dans le bâtiment A pour les nuits 3, 4, 5 et pour la nuit 10.

2/ Dans le bâtiment B qui compte 2010 sommets, le directeur place un seul gardien pour la nuit 1 (les 2009 autres postes étant donc vacants). Combien seront-ils pour la nuit 8 ? pour la nuit 99 ?

3/ Dans le bâtiment C, suberbe octogone (huit sommets), le directeur constate avec affolement lors de la nuit 3 qu'il n'y a plus aucun gardien ! Combien en avait-il pourtant postés lors de la nuit 1 ?

4/ Le bâtiment D est un heptagone (sept sommets). Le directeur a choisi une disposition des gardes pour la nuit 1. Lors de la nuit 2, les gardes du bâtiment D sont-ils en nombre pair ?

5/ Dans le bâtiment E (neuf sommets), le directeur constate après une semaine que la disposition lors de la nuit 8 est rigoureusement identique à celle choisie lors de la nuit 1, et que l'un des postes de garde n'a jamais été occupé durant cette période. Combien de gardiens le directeur avait-il postés lors de la nuit 1 ?

1/ On obtient les configurations suivantes :

Nuit 1 :	-	G	-	V	-	G	-	V	-	V	-
Nuit 2 :	-	G	-	G	-	G	-	V	-	V	-
Nuit 3 :	-	V	-	G	-	V	-	V	-	V	-
Nuit 4 :	-	V	-	G	-	V	-	G	-	G	-
Nuit 5 :	-	G	-	G	-	G	-	V	-	V	-

Les dispositions des nuits 2 et 5 étant identiques, on retrouvera la même disposition aux nuits n et $n+3$ à partir de $n=2$. La disposition lors de la nuit 10 est donc la même que lors de la nuit 4, c'est à dire : -V-G-V-G-G-.

2/ On obtient les configurations suivantes :

Nuit 1 : ... - V - V - V - V - G - V - V - V - V - ...
Nuit 2 : ... - G - G - G - V - G - V - G - G - G - ...
Nuit 3 : ... - G - G - V - G - G - G - V - G - G - ...
Nuit 4 : ... - G - V - G - V - G - V - G - V - G - ...
Nuit 4 : ... - G - V - G - V - G - V - G - V - G - ...
Nuit 5 : ... - V - G - G - G - G - G - G - G - V - ...

Après la nuit 2, tous les sommets sont occupés, sauf dans une région centrée sur le sommet occupé initialement, à partir duquel une perturbation s'élargit de nuit en nuit. Les deux bornes de cette perturbation ne se rejoindront qu'aux alentours de la 1000ème nuit, donc longtemps après le délai envisagé dans la question. Les nuits de rang impair (sauf la première), tous les sommets sont occupés sauf deux d'entre eux ; il y aura donc 2008 gardes pour la nuit 99. En revanche, si n est pair, le nombre de gardes de la nuit n est égal à n. Il y aura donc 2010 - 8 = 2002 gardes lors de la nuit 8.

3/ En raisonnant de façon rétrograde, on obtient les configurations suivantes :

- V - V - G - G - G - G - V - V -
- V - G - G - V - V - G - G - V -

Dans les deux cas, il y a quatre gardes.

4/ Toute position initiale est suivie d'une configuration où les gardes sont en nombre impair.

5/ Le cycle est celui-ci :

- V - G - V - G - G - G - V - V - G - (5 gardes)
- G - G - G - V - G - V - V - V - G - (5 gardes)
- G - G - V - G - G - V - G - V - V - (5 gardes)
- V - V - G - V - V - G - G - V - V - (3 gardes)
- G - V - G - V - V - V - V - V - G - (3 gardes)
- V - G - G - V - G - G - G - V - V - (5 gardes)
- V - V - V - G - V - G - V - V - G - (3 gardes)

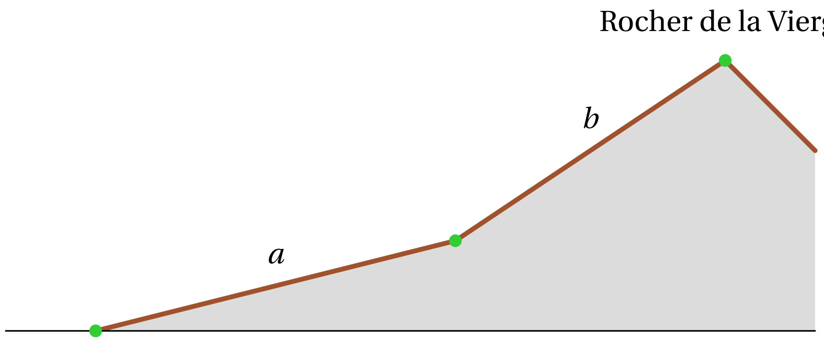
Ces sept configurations se succèdent et le 8ème sommet est toujours vacant. La disposition de la première nuit est l'une d'entre elles. Il y avait donc 3 ou 5 gardes lors de la première nuit.

À bicyclette

Parti à 9 h ce matin, Yves a décidé de faire à vélo l'aller et retour jusqu'au sommet du rocher de la Vierge. Sur la première partie du trajet la montée est légère et il a pu rouler à 18 km/h. Sur la seconde partie, la pente s'accentue et sa vitesse est tombée à 15 km/h. Le point de vue atteint, il a contemplé le superbe paysage pendant un quart d'heure puis a fait demi-tour. Il est redescendu à 30 km/h tout d'abord puis a terminé à 22,5 km/h sur la partie la moins inclinée du parcours. Sa randonnée s'est achevée à 11 h 30 min.

1/ Quelle distance au total Yves a-t-il donc parcouru ce matin ?

2/ Dans quel créneau horaire a-t-il pu atteindre le sommet ? Donner une interprétation graphique de votre réponse.



1/ Le trajet d'Yves, à l'aller et au retour, comporte deux parties, de longueurs a et b. Le *rapport* de sa sortie, en considérant les différents temps indiqués, est le suivant :

$$\frac{a}{18} + \frac{b}{15} + \frac{1}{4} + \frac{b}{30} + \frac{a}{22.5} = \frac{5}{2}.$$

Cela tombe bien, l'égalité précédente se simplifie en

$$a + b = \frac{45}{2}.$$

La distance parcourue par Yves est donc égale au double de la précédente, c'est-à-dire 45km.

2/ La durée de l'aller est égale à

$$d = \frac{a}{18} + \frac{b}{15}.$$

Comme on ne connait que la somme $a + b$ sans connaître exactement a et b, nous ne pouvons pas déterminer avec précision le moment où Yves a atteint le sommet. On peut quand même écrire

$$d = \frac{1}{18}\left(\frac{45}{2} - b\right) + \frac{b}{15} = \frac{5}{4} + \frac{b}{90}.$$

Dans le cas où la deuxième partie est très courte ($b = 0$) la durée de l'aller est donc de 1h 15 (5/4) et dans le cas où elle constitue l'essentiel du parcours ($b = 45/2$) alors la montée au rocher de la Vierge a duré 1h30 ($5/4 + 1/4$).
En définitive, Yves a atteint le sommet de la Vierge entre 10h 15 et 10h 30.

Des suites de Fibonacci

Les dix nombres 1-1-2-3-5-8-13-21-34-55 sont le début de la célèbre suite de Fibonacci, associée à la reproduction des lapins, dont chaque terme s'obtient à partir du troisième en ajoutant les deux termes qui le précédent. On nomme aussi suite de Fibonacci toute succession de termes dont les deux premiers sont choisis arbitrairement, et dont les suivants sont calculés sur le principe que le terme numéro $(n+2)$ est égal à la somme des deux termes précédents : ceux de numéros $(n+1)$ et n, ceci pour tout n entier strictement positif.

1/ Continuer à écrire les termes de la célèbre suite de Fibonacci qui suivent les dix premiers donnés, et arrêtez-vous dés que vous dépassez 2010.

2/ a) Dans une autre suite de Fibonacci les deux premiers termes ont pour valeurs a et b dans cet ordre. Écrire les termes suivants de cette suite, en fonction de a et b, du numéro 3 jusqu'au numéro 10.

b) Calculer en fonction de a et b la somme des dix premiers termes.

c) Comparer cette somme et la valeur du septième terme.
Vous observez les 10 premiers termes d'une suite de Fibonacci, vous vous rappelez juste que le quatrième à partir de la fin vaut 123, pouvez-vous donner la somme des 10 termes ?

3/ a) Vous participez à un jeu de marelle constituée de 10 cases numérotées de 1 à 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Il s'agit à partir de la case 1 de sauter jusqu'à la case 10. Vous avez le droit de sauter d'une case à la suivante, ou bien de sauter par dessus une case pour se trouver une case plus loin. Combien y a-t-il de possibilités différentes d'arriver sur la case 10 ?

b) On dispose d'autant de cubes de même taille rouges ou bleus qu'on veut. On bâtit des tours de base un cube et de 10 étages de haut, en respectant la condition qu'il n'y ait jamais deux étages rouges successifs. Combien peut-on faire de tours colorées différentes ?

4/ Tout entier qui ne figure pas dans la célèbre suite de Fibonacci peut être décomposé en somme de plusieurs termes distincts de cette suite, même si on oblige que deux de ces nombres ne doivent pas être consécutifs dans la suite d'origine.

a) Vérifiez cela par écrit pour tous les nombres concernés inférieurs à 34 et vérifiez aussi qu'avec toutes les contraintes la décomposition est unique (c'est à dire se fait d'une seule façon).

b) Écrivez maintenant la décomposition du nombre 2010 en somme de termes de la célèbre suite de Fibonacci.

c) Dans la décomposition de chaque nombre il y a une plus petite composante (le plus petit nombre utilisé). Considérez les plus petites composantes possibles rencontrées dans les décompositions des nombres inférieurs à 34, rangez-les en ordre croissant. Pour chaque plus petite composante, choisir le nombre le plus petit inférieur à 34 qui l'utilise, et écrire la liste en ordre croissant des nombres obtenus : que remarquez-vous ?

5/ Le tableau ci-dessous est un carré magique : la somme de chaque ligne, de chaque colonne, de chaque grande diagonale est le même nombre : 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

a) Construisez le tableau de 9 cases qu'on obtient en remplaçant chaque nombre actuel par la valeur du terme ayant ce numéro dans la célèbre suite de Fibonacci.
Calculez les produits des trois nombres de chaque ligne, de chaque colonne.
Calculez la somme des produits obtenus sur chaque ligne et comparez-la avec la somme des produits obtenus sur chaque colonne.

b) Pour comprendre ce que vous venez de remarquer sur l'exemple chiffré, reprenez les questions du a) avec les neuf termes littéraux d'une suite de Fibonnaci qui commençe par a, b, ... et concluez.

1/ Voici la liste : 1-1-2-3-5-8-13-21-34-55-89-144-233-377-610-987-1597-2584. On s'arrête car on vient de dépasser 2010.

2/ Voici les dix nombres :

a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$

Leur total est $(55a+88b)$, ce qui représente 11 fois le septième d'entre eux $(5a+8b)$, qui se trouve être aussi le quatrième à partir de la fin.
Si le quatrième à partir de la fin est 123, le total des dix nombres est $11 \times 123 = 1353$.

3/ a) Le nombre de façons d'arriver sur la case 2 est 1, le nombre de façons d'arriver sur la case 3 est 2 (soit depuis la case 1, soit depuis la case 2). Ensuite on remarque qu'on peut arriver sur les autres cases soit en provenant de la case juste précédente soit en provenant de la deuxième case avant. Le nombre de façons d'arriver vérifie la propriété de Fibonacci : c'est la somme du nombre de façons d'arriver à la case précédente et du nombre de façons d'arriver à la deuxième case avant.

Numéro de la case	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de façons d'y arriver	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Il y a 55 façons d'arriver sur la case 10 de la marelle.

b) Le nombre de façons de poser le cube de base est 2 : soit bleu, soit rouge.
Le nombre de façons de poser le deuxième cube est 3 : à partir d'un bleu on peut soit mettre un bleu soit mettre un rouge, et à partir d'un rouge on ne peut mettre quun bleu.
Remarquons ensuite que quand on arrive à une tour de n étages :

- Soit elle est de sommet bleu et on peut l'avoir construit à partir d'une tour de $(n-1)$ étages dont le sommet pouvait être bleu ou rouge. Le nombre de cas est alors le nombre de tours à $(n-1)$ étages.
- Soit elle est de sommet rouge et alors l'avant dernier étage $(n-1)$ était forcément bleu ce qui signifie qu'on pouvait l'avoir construit à partir de n'importe quelle tour de $(n-2)$ étages (de sommet bleu ou rouge). Le nombre de cas est alors le nombre de tours à $(n-2)$ étages.

On est encore en situation de suite de Fibonacci.

Nombre d'étages de la tour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de façons de la construire	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Il y a 144 façons de construire la tour de dix étages.

4/ a) Les décompositions uniques ne tolérant pas deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci, pour des nombres inférieurs à 34, sont :

$4=1+3$	$6=1+5$	$7=2+5$	$9=1+8$	$10=2+8$	$11=3+8$
$12=1+3+8$	$14=1+13$	$15=2+13$	$16=3+13$	$17=1+3+13$	$18=5+13$
$19=1+5+13$	$20=2+5+13$	$22=1+21$	$23=2+21$	$24=3+21$	$25=1+3+21$
$26=5+21$	$27=1+5+21$	$28=2+5+21$	$29=8+21$	$30=1+8+21$	$31=2+8+21$
$32=3+8+21$	$33=1+3+8+21$				

Remarque : La petite composante des décompositions peut être utile dans le jeu « la pile des pièces d'or » exposé dans la brochure éditée par le concours Kangourou « Spécial le nombre d'or ». Les positions gagnantes du jeu sont liées aux termes de la suite de Fibonacci, et la tactique à suivre est liée à la décomposition.

b) $2010 = 1597+377+34+2$.

c) La plus petite composante 1 concerne le nombre 4, la plus petite composante 2 concerne le 7, la plus petite composante 3 concerne le 11, la plus petite composante 5 concerne le 18 et la plus petite composante 8 concerne le 29.
La liste est donc : 4-7-11-18-29 et c'est une suite de Fibonacci !

5/ a) On obtient le carré suivant :

21	1	8
2	5	13
3	34	1

Produit des lignes, de haut en bas : 168, 130, 102. Leur total est 400.
Produit des colonnes, de gauche à droite : 126, 170, 104. Leur total est 400.
Les deux sommes de produits sont égales.

b) On obtient le carré suivant :

$13a+21b$	a	$5a+8b$
$a+b$	$3a+5b$	$8a+13b$
$2a+3b$	$21a+34b$	b

Produit des trois termes de chaque ligne, de haut en bas :

$$65a^3+209a^2b+168ab^2, \quad 24a^3+103a^2b+144ab^2, \quad 40a^2b+129ab^2+104b^3.$$

Somme des produits obtenus avec les lignes :

$$89a^3+354a^2b+443ab^2+167b^3.$$

Produit des trois termes de chaque colonne, de gauche à droite :

$$26a^3+107a^2b+144ab^2+63b^3, \quad 63a^3+207a^2b+170ab^2, \quad 40a^2b+129ab^2+104b^3.$$

Somme des produits obtenus avec les colonnes :

$$89a^3+354a^2b+443ab^2+167b^3.$$

On trouve la même somme de produits avec les lignes ou les colonnes ceci quelles que soient les deux premières valeurs de la suite de Fibonacci.