Exercice National 2 : ***A la recherche du « chaînonze ».***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « *a b* » où *a* et *b* sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « *a a* ».

   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « *a b* » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

<u>Correction (proposée par Nancy-Metz)</u>

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^{e} terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
   Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3 + x - 2 = 0$ et $3 + x - 2 = 11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

4. On trouve :
   a. Si $b = a$, le prolongement est « $a\ b\ 0$ ».
   b. Si $b = a - 1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11 - (a - b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.
   c. Si $b < a - 1$, on a le chaînonze « $a\ \ b\ \ (11 - a + b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a - 1$, on a $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$.
   d. Si $a < b$, « $a\ \ b\ (b - a)$ » avec $b - a$ est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$.
   Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.

5. **1er cas : si $a = b$**
   Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.
   Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3. Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « $a\ \ a\ \ 0\ \ (11 - a)\ \ (11 - a)\ \ 0\ \ a\ \ a$ ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.
   2^{e} cas : $a = b + 1$
   la chaîne se bloque et est de longueur 2.
   3^{e} cas : $a = 0$ et $b = 1$
   « 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.
   4^{e} cas : $0 < a < b$,
   « $a\ \ b\ \ (b - a)\ \ (11 - a)\ \ (11 - b)\ \ (11 + a - b)\ \ a\ \ b$ » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si
   - $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
   - $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5e cas : Si *b* = 0 et *a* > 1
le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.
6e cas : Si *a* > *b* + 1 > 1

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figure 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

a \ *b*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	