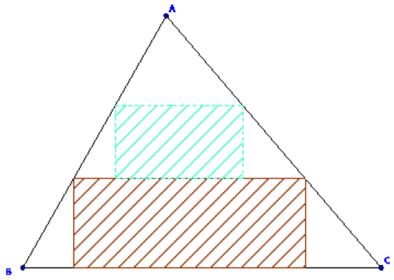
# Un paysagiste dans l'embarras (Sujet n° 15)

**Énoncé :**

Un paysagiste est chargé par un propriétaire de l'organisation d'une parcelle triangulaire.

Le propriétaire souhaite faire deux terrasses (parties hachurées de la figure) dont l'aire soit maximale par rapport à la surface de la parcelle. Le reste de la parcelle sera constituée de jardins.

Pouvez-vous aider le paysagiste à remplir son contrat ?

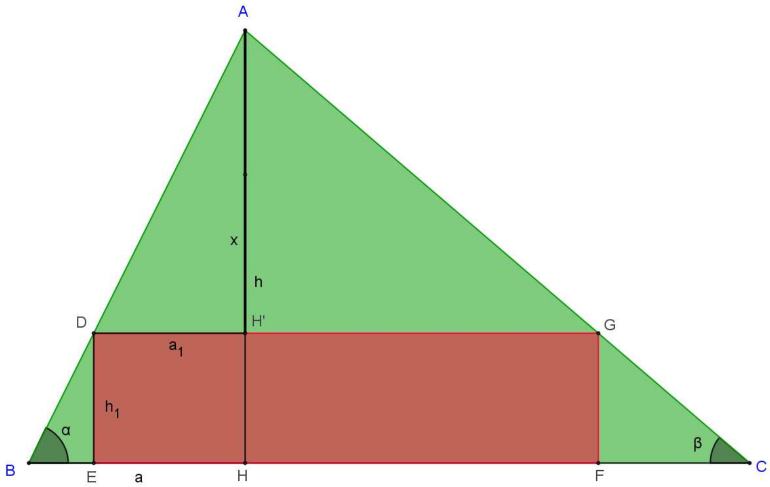



**Solution** :

Calculons dans un premier temps la surface du rectangle en fonction de la longueur AH' = x.

On note [AH] la hauteur issue de A du triangle ABC. $\alpha = \widehat{ABC}$, $\beta = \widehat{BCA}$.

On calcule la surface $S_1$' du rectangle DEHH'.
On a $S_1' = DH' \times DE = a_1 \times h_1$.




Dans le triangle rectangle ADH', on a $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a_1}{x}$ d'où $\mathbf{a_1 = x \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

Dans le triangle rectangle BDE, on a $\tan \alpha = \frac{h_1}{a - a_1}$ d'où $\mathbf{h_1 = (a - a_1) \tan \alpha}$

Donc $S_1' = x \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \times (a - a_1) \tan \alpha = x(a - a_1)$ puisque $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \tan \alpha = 1$

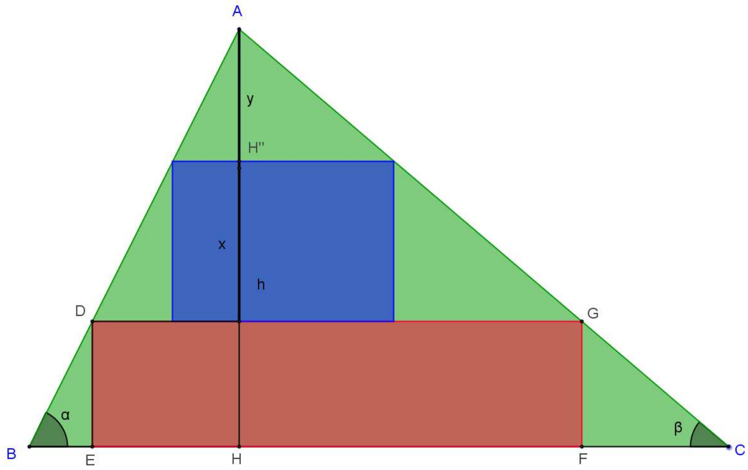
$\mathbf{S_1' = x\left(a - x \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)}$ et comme $a = \frac{h}{\tan(\alpha)}$, on a $S_1' = x\left(\frac{h}{\tan(\alpha)} - \frac{x}{\tan(\alpha)}\right) = \mathbf{\frac{1}{\tan(\alpha)}(h - x)x}$

De la même façon, l'aire du rectangle FGH'H est $S_1'' = \frac{1}{\tan(\beta)}(h - x)x$

Donc l'aire du rectangle DEFG est $S_1 = \frac{1}{\tan(\alpha)}(h - x)x + \frac{1}{\tan(\beta)}(h - x)x$

L'aire du rectangle DEFG est $\boxed{\mathbf{S_1 = \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)}\right)(h - x)x}}$

En posant AH'' = y et en considérant le triangle ADG (de hauteur x) , on obtient la même configuration que précédemment.
On en déduit alors la surface $S_2$ du second rectangle : $\boxed{\mathbf{S_2 = \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)}\right)(x - y)y}}$



La surface des deux parcelles est donc donnée par $\boxed{\mathbf{S = \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)}\right)((x-y)y + (h-x)x)}}$

• On peut obtenir la surface du triangle ABC par la formule : $T = \frac{1}{2}BC\times AH) = \frac{1}{2}BH\times HA + \frac{1}{2}HC\times AH$ ou encore $\boxed{\mathbf{T = \frac{1}{2}h\left(\frac{h}{\tan(\alpha)} + \frac{h}{\tan(\beta)}\right)}}$

• Le rapport $R = \dfrac{\text{Surface des deux terrasses}}{\text{Surface de la parcelle}}$ vaut donc $R = \dfrac{S}{T} = \dfrac{\left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)}\right)((x-y)y + (h-x)x)}{\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)}\right)}$ soit $\mathbf{R = \frac{2}{h^2}(-x^2 + xy + xh - y^2)}$.

• Notons f la fonction à deux variables donnant ce rapport en fonction de x et y :
$f(x, y) = \frac{2}{h^2}(-x^2 + xy + xh - y^2)$.

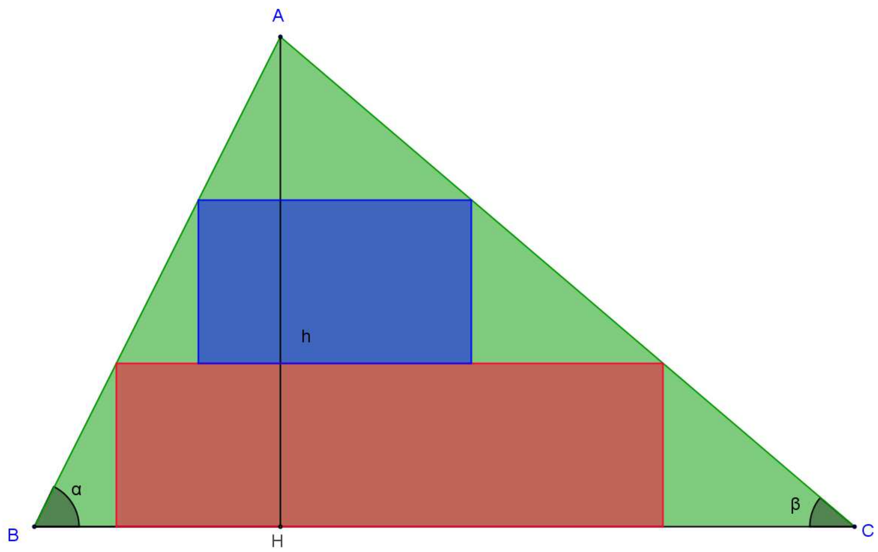
Le minimum de f est atteint lorsqu'on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{h^2}(-2x + y + h)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{h^2}(x - 2y)$.

Le système $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + y + h = 0 \end{cases}$ donne $x = \frac{2h}{3}$ et $y = \frac{h}{3}$.

**Pour remplir son contrat, le paysagiste devra découper la hauteur de sa parcelle en trois parties égales puis tracer les parallèles à la base afin d'obtenir les deux terrasses.**

De plus, puisqu'on a $f\left(\frac{2h}{3}, \frac{h}{3}\right) = \frac{2}{3}$, on peut préciser que **ses terrasses occuperont les $\mathbf{\frac{2}{3}}$ de sa parcelle.**




**Olivier Rochoir**