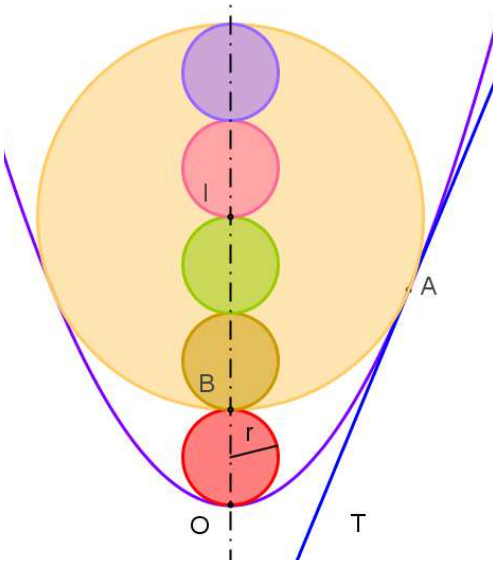
Sangaku toujours ? (Sujet n° 4)

Énoncé :

Pour reproduire ce beau sangaku inspiré des travaux de l'IREM de Poitiers (2de et 1re S), il suffit de connaitre le rayon du petit cercle.
Calculer ce rayon sachant que l'équation de la parabole est $y = x^2$ dans un repère orthonormé d'unité 1cm.



Précisions
Ce qu'on voit sur le sangaku fait office de données :

- les cercles sont bien tangents entre eux et leurs centres sont alignés sur l'axe de la parabole ;
- le petit cercle rouge est tangent à la parabole en un seul point ;
- le grand cercle est tangent à la parabole en deux points.

Solution :

Commençons par placer quelques points sur la figure :
☞ Le point O origine du repère, point d'intersection du petit cercle rouge et de la parabole.
☞ Le point B, point d'intersection du petit cercle rouge et du grand cercle, de coordonnées (0 ; 2r) où r est le rayon du petit cercle rouge.
☞ Le point I centre du grand cercle de coordonnées (0 ; 6r).
☞ Le point A, point de tangence entre la parabole et le grand cercle, d'abscisse a.

Le point A appartenant à la parabole d'équation $y = x^2$, ses coordonnées sont donc $(a ; a^2)$.
Au point A, la tangente à la parabole a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ où $f(x) = x^2$ et f' la dérivée de f.
On a donc $f'(x) = 2x$ et l'équation de la tangente T est donc $y = 2a(x - a) + a^2$ qui peut encore s'écrire $\mathbf{y = 2ax - a^2}$.
La tangente T est aussi la tangente en A au grand cercle et est, par conséquent, perpendiculaire au rayon [IA] du grand cercle. On va en déduire l'équation de la droite (IA) : Celle-ci est de la forme $y = mx + p$.
Comme les droites (IA) et T sont perpendiculaires, le produit de leur coefficient directeur est égale à – 1.
On a alors $2am = -1$ d'où $m = -\frac{1}{2a}$.

L'équation de la droite (IA) est donc $y = -\frac{1}{2a}x + 6r$ (puisque $I \in$ (IA), $p = 6r$).

Le point A appartenant à la droite (IA), on a $a^2 = -\frac{1}{2a}\times a + 6r$ c'est-à-dire $\mathbf{a^2 = -\frac{1}{2} + 6r}$ (☆).

Comme $a^2 > 0$, on en déduit que l'on doit avoir $\mathbf{r > \frac{1}{12}}$.
Afin de déterminer la valeur de r, on va établir une équation en indiquant, par exemple, que IA = IB.
On a $IA^2 = a^2 + (a^2 - 6r)^2$ et $IB^2 = (4r)^2$. On obtient donc $a^2 + (a^2 - 6r)^2 = (4r)^2$ ce qui, avec la relation (☆), devient $-\frac{1}{2} + 6r + (-\frac{1}{2} + 6r - 6r)^2 = 16r^2$ ou encore : $16r^2 - 6r + \frac{1}{4} = 0$ qui a pour solutions $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{16}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{16}$. Seule la solution r_1 vérifie l'inégalité $\mathbf{r > \frac{1}{12}}$.

Le rayon du petit cercle est donc $\boxed{\mathbf{r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{16}}}$ cm (soit environ 0,327 cm à 10^{-3} près)

Olivier Rochoir