Qui suis-je ? (Sujet n° 3)

Énoncé :

Je suis un nombre à trois chiffres ; mon quotient par 11 est égal à la somme des carrés de mes trois chiffres. Qui suis-je ?
Je n'ai nullement la prétention d'être unique !

Solution :

• La solution trouvée à l'aide d'un petit programme en Python :

```
for a in range(1,10):
   for b in range(0,10):
      for c in range(0,10):
         n=100*a+10*b+c
         if n/11==a*a+b*b+c*c:
            print(n," est solution")
```

En exécutant le programme, on obtient :

550 est solution
803 est solution

• La solution à l'aide de l'arithmétique :

Notons $\overline{abc}$ le nombre de 3 chiffres. On a alors $1 \leqslant a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$ et $0 \leqslant c \leqslant 9$.

La traduction de l'énoncé donne $\dfrac{\overline{abc}}{11} = a^2 + b^2 + c^2$.

Remarquons que le nombre $\dfrac{\overline{abc}}{11}$ doit être entier c'est-à-dire que $\overline{abc}$ est divisible par 11.

Or $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 11b + a - b + c = 11(9a + b) + a - b + c$.

Donc $\overline{abc}$ est divisible par 11 si et seulement si $a - b + c$ est divisible par 11.

On n'a donc que deux possibilités : $a - b + c = 0$ ou $a - b + c = 11$.

Études ces deux cas :

☞ **$\underline{a - b + c = 0}$** (donc $b = a + c$)

L'égalité $\dfrac{\overline{abc}}{11} = a^2 + b^2 + c^2$ devient alors $\dfrac{100a + 10b + c}{11} = a^2 + b^2 + c^2$

c'est-à-dire $\dfrac{100a + 10a + 10c + c}{11} = a^2 + (a + c)^2 + c^2$

ou encore $10a + c = 2a^2 + 2ac + 2c^2$ (❶)

On déduit de cette relation que c doit être pair. On doit donc tester 5 cas :

- Si $\boxed{c = 0}$, (❶) devient $10a = 2a^2$ qui a pour solutions $\boxed{a = 5}$ ou $a = 0$ (à exclure)
- Si $c = 2$, (❶) devient $10a + 2 = 2a^2 + 4a + 8$ ou encore $2a^2 - 6a + 6 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si $c = 4$, (❶) devient $10a + 4 = 2a^2 + 8a + 32$ ou encore $2a^2 - 2a + 28 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si $c = 6$, (❶) devient $10a + 6 = 2a^2 + 12a + 72$ ou $2a^2 + 2a + 66 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si $c = 8$, (❶) devient $10a + 8 = 2a^2 + 16a + 128$ ou $2a^2 + 6a + 120 = 0$ qui n'a pas de solution entière.

On obtient la solution $\boxed{\mathbf{550}}$ (car $b = a + c = 0 + 5$).

☞ **<u>a – b + c = 11</u>** (donc b = a + c – 11)

L'égalité $\dfrac{\overline{abc}}{11} = a^2 + b^2 + c^2$ devient alors $\dfrac{100a + 10a + 10c - 110 + c}{11} = a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2$

ou encore $10a - 10 + c = a^2 + a^2 + c^2 - 22a - 22c + 2ac + 121 + c^2$

qui peut s'écrire $2a^2 + 2c^2 - 32a - 23c + 2ac + 131 = 0$ (❷)

On teste les 10 cas :

- Si c = 0, (❷) devient $2a^2 - 32a + 131 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si c = 1, (❷) devient $2a^2 - 30a + 110 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si c = 2, (❷) devient $2a^2 - 28a + 93 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si $\boxed{c = 3}$, (❷) devient $2a^2 - 26a + 80 = 0$ qui a pour solutions $\boxed{a = 8}$ et $\boxed{a = 5}$.
- Si c = 4, (❷) devient $2a^2 - 24a + 71 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si c = 5, (❷) devient $2a^2 - 22a + 66 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si c = 6, (❷) devient $2a^2 - 20a + 65 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si c = 7, (❷) devient $2a^2 - 18a + 68 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si c = 8, (❷) devient $2a^2 - 16a + 75 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si c = 9, (❷) devient $2a^2 - 14a + 86 = 0$ qui n'a pas de solution entière.

Si c = 3 et a = 8 on a : b = a + c – 11 = 0 d'où la solution $\boxed{\mathbf{803}}$.

Si c = 3 et a = 5 on a : b = a + c – 11 = – 3 qui ne convient pas.

Le problème n'a donc pas une solution unique mais deux : $\boxed{\textbf{550 et 803}}$

Olivier Rochoir