"Un coup de dés jamais n'abolira le hasard", Stéphane Mallarmé (Sujet n° 17)

Énoncé :

En moyenne, combien de fois faut-il lancer un dé parfaitement équilibré, pour finir par obtenir au moins une fois les 6 faces possibles ?

Solution :

• Un petit programme en Python pour estimer la valeur du résultat :

```
from random import randrange
def partie():
    resultat=[0,0,0,0,0,0] #pour se souvenir si la face i est sortie
    n=0
    while resultat !=[1,1,1,1,1,1]: #tant que toutes les faces n'ont pas été atteinte, on relance
        n=n+1 #compte le nombre de lancer
        resultat[randrange(0,6)]=1 #on met 1 lorsque la face est sortie
    return n

nombre=int(input("Nombre de lancers : "))
somme=0
for k in range(0,nombre):
    somme=somme+partie()
moyenne=somme/nombre
print(moyenne)
```

Avec un nombre de lancers de 1.000.000, on obtient : 14.700639

• Notons X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir toutes les faces du dé.
Soit X_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la $i^{\text{ième}}$ nouvelle face.
Tous les X_i suivent une loi géométrique. Précisons leur paramètre :
Dès le 1^{er} lancer, on obtient une nouvelle face, donc X_1 a pour paramètre 1.
Pour obtenir une $2^{\text{ème}}$ face, on n'a plus que 5 choix sur les 6 faces du dé, donc X_2 a pour paramètre $\frac{5}{6}$.
De même, X_3 a pour paramètre $\frac{4}{6}$, X_4 a pour paramètre $\frac{3}{6}$, X_5 a pour paramètre $\frac{2}{6}$ et X_6 a pour paramètre $\frac{1}{6}$.
On cherche le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir toutes les faces du dé, c'est-à-dire E(X).
On a $E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) + E(X_6)$.
Or l'espérance mathématique d'une loi géométrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$.
Donc $E(X) = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = \frac{147}{10} = 14{,}7$.
Il faut donc lancer le dé 15 fois en moyenne pour obtenir les faces du dé.

Olivier Rochoir