Et si la calculatrice ne servait à rien ? (Sujet n° 16)

Énoncé :

Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice : 2012^{2012} et 2013^{2011}.

Solution :

• Montrons par récurrence que pour tout entier n > 1, on a $\mathbf{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} < n}$ qu'on appelle propriété P(n).

Pour n = 2, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{3}{2}$ qui est inférieur à 2. La propriété est donc vraie pour n = 2.

Hypothèse de récurrence : Il existe un n > 1 tel que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} < n$.

Il faut montrer que P(n+1) est encore vraie c'est-à-dire que $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < n+1$.

On a n < n +1 donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ et $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{n}$

On en déduit que $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ ce qui donne d'après l'hypothèse de récurrence :

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\times n$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < n+1$

La propriété P(n + 1) est donc vraie : On a prouvé que la propriété P(n) est héréditaire à partir de n = 2.
Donc par l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n > 1.

• En appliquant ce résultat avec n = 2012, on obtient :

$$\left(1+\frac{1}{2012}\right)^{2011} < 2012$$

C'est-à-dire $\left(\frac{2013}{2012}\right)^{2011} < 2012$ ou encore $\frac{2013^{2011}}{2012^{2011}} < 2012$

On obtient donc $\mathbf{2013^{2011} < 2012^{2012}}$

Olivier Rochoir