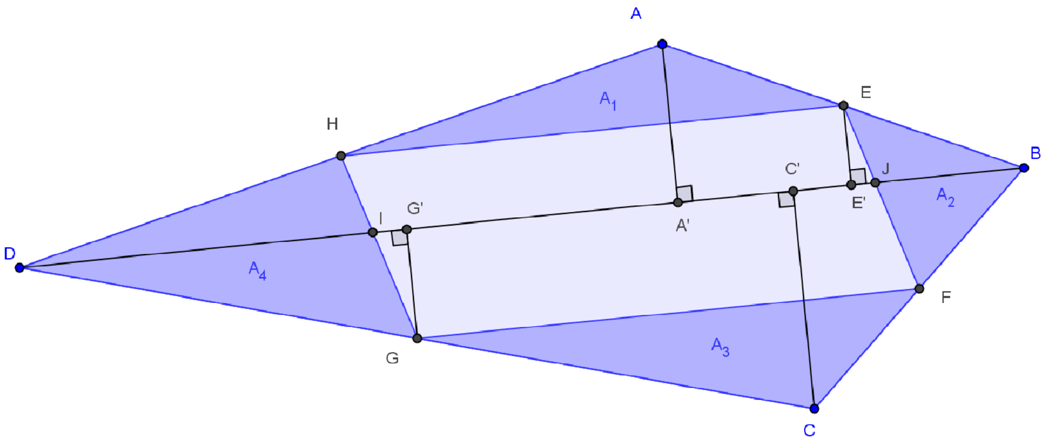
Sujet 4 - Une inégalité d'aires !

Énoncé :

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$.
Soient E, F, G, H les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD], [DA]$.
Posons $\mathcal{A}_1$ l'aire de AEH, $\mathcal{A}_2$ l'aire de BEF, $\mathcal{A}_3$ l'aire de CFG, $\mathcal{A}_4$ l'aire de DGH et $\mathcal{A}$ l'aire de $ABCD$. Montrer que :

$$\sqrt[3]{\mathcal{A}_1} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_2} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_3} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_4} \leq 2\sqrt[3]{\mathcal{A}}$$

Solution :



1ère étape : Montrons que $\mathbf{2(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4) = \mathcal{A}}$.

- A l'aide du théorème des milieux, on montre que les droites (HE) et (GF) sont parallèles à (BD) et donc parallèles entres elles. De même, (GH) et (FE) sont parallèles. Donc $FGHE$ est un parallélogramme.
- Toujours avec le théorème des milieux, on montre les égalités suivantes : $EE' = \frac{1}{2}AA'$ et $HE = \frac{1}{2}DB$ puis $GG' = \frac{1}{2}CC'$. Donc l'aire de $EFGH = HE \times (EE' + GG') = \frac{1}{2}DB \times (\frac{1}{2}AA' + \frac{1}{2}CC')$.

L'aire de $EFGH = \frac{1}{2}$Aire de $ABCD$.

On en déduit que $2(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4) = \mathcal{A}$. ■

2ème étape : Soit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, $2n$ nombres réels strictement positifs. Soit p et q deux réels supérieur à 1 tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Démontrons ce résultat.

- La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est une fonction concave (sa dérivée seconde est négative pour tout $x \in]0; +\infty[$). Cela signifie que pour tout x_1 et x_2 de $]0; +\infty[$, et pour tout $t \in [0\,;1]$, on a $f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

En prenant $x_1 = a_k^p$, $x_2 = b_k^q$, $t = \frac{1}{q}$ et $1 - t = \frac{1}{p}$, on obtient avec la fonction ln :

$$ln\left(\frac{1}{p}a_k^p + \frac{1}{q}b_k^q\right) \geq \frac{1}{p}ln\left(a_k^p\right) + \frac{1}{q}ln\left(b_k^q\right).$$

$$ln\left(\frac{1}{p}a_k^p + \frac{1}{q}b_k^q\right) \geq \frac{p}{p}ln\left(a_k\right) + \frac{q}{q}ln\left(b_k\right).$$

$$ln\left(\frac{1}{p}a_k^p + \frac{1}{q}b_k^q\right) \geq ln(a_k) + ln(b_k)$$

$$ln\left(\frac{1}{p}a_k^p + \frac{1}{q}b_k^q\right) \geq ln(a_k\, b_k).$$

D'où $\frac{1}{p}a_k^p + \frac{1}{q}b_k^q \geq a_k b_k$

• Supposons pour l'instant que $\sum_{k=1}^n a_k^p = 1$ et $\sum_{k=1}^n b_k^q = 1$

On a alors en faisant la somme de l'inégalité précédente de $k = 1$ à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p}a_k^p + \frac{1}{q}b_k^q \geq \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^n b_k^q \geq \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq 1$$

• Pour montrer le cas général, posons $u_k = \frac{a_k}{(\sum a_k^p)^{\frac{1}{p}}}$ et $v_k = \frac{b_k}{(\sum b_k^q)^{\frac{1}{q}}}$

On a bien $\sum_{k=1}^n u_k^p = 1$ et $\sum_{k=1}^n v_k^q = 1$ donc $\sum_{k=1}^n u_k v_k \leq 1$

Ce qui, en remplaçant, démontre le résultat :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \blacksquare$$

3ème étape : Pour démontrer le résultat de l'énoncé, posons

$$a_1 = \sqrt[3]{\mathcal{A}_1}, a_2 = \sqrt[3]{\mathcal{A}_2}, a_3 = \sqrt[3]{\mathcal{A}_3}, a_4 = \sqrt[3]{\mathcal{A}_4},\ b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 1 \text{ et } p = 3 \text{ donc } q = \frac{3}{2}$$

On obtient alors : $\sqrt[3]{\mathcal{A}_1} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_2} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_3} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_4} \leq \left(\sum_{k=1}^4 \mathcal{A}_k\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{k=1}^4 1\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\sqrt[3]{\mathcal{A}_1} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_2} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_3} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_4} \leq \left(\sum_{k=1}^4 \mathcal{A}_k\right)^{\frac{1}{3}} 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\mathcal{A}_1} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_2} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_3} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_4} \leq \left(2\sum_{k=1}^4 \mathcal{A}_k\right)^{\frac{1}{3}} 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{\mathcal{A}_1} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_2} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_3} + \sqrt[3]{\mathcal{A}_4} \leq 2\sqrt[3]{\mathcal{A}}}$$

$\blacksquare$

Olivier Rochoir