Sujet 1 : Quand Roger Federer utilisait les probabilités !

Énoncé :

Quand le tennisman Roger Federer est au service il a 72 % de chances de gagner le point (statistiques du tournoi de Roland Garros 2014). A-t-il pour autant 72 % de chances de remporter le jeu (si ce jeu n'est pas décisif) ?

Solution :

Notons p le pourcentage de chances de gagner le point et q celui de le perdre (ici, on a aura $p = 0{,}72$ et $q = 1 - p = 0{,}28$) et calculons le pourcentage de chances de remporter le jeu.

☞ Il existe plusieurs manières de gagner un jeu :

- Un jeu blanc : (15-0), (30-0), (40-0), jeu.

  Pour cela il faut gagner 4 points consécutifs. La probabilité est alors : $p_0 = p^4$.

- On gagne le jeu en perdant un seul point. Il y a les 4 possibilités ci-dessous :

  (15-0), (30-0), (40-0),(40-15), jeu
  (15-0), (30-0), (30-15),(40-15), jeu.
  (15-0), (15-15), (30-15),(40-15), jeu.
  (0-15), (15-15), (30-15),(40-15), jeu.

  Ce qui donne une probabilité de $p_1 = 4p^4q$ (faire un arbre).

- On gagne le jeu en perdant deux points. Il y a 10 possibilités (on écrit F lorsque Federer marque le point et A lorsque son adversaire gagne le point) :

  AAFFFF, AFAFFFF, AFFAFF, AFFFAF, FAAFFF, FAFAFF, FAFFAF, FFAAFF, FFAFAF, FFFAAF

  Ce qui donne une probabilité de $p_2 = 10p^4q^2$.

- Si on arrive au score de 40-40, il faut pour gagner le jeu avoir deux points d'écart.

  La probabilité d'obtenir 40-40 est $p_3 = 20p^3q^3$ (il faut en effet placer 3 F et 3 A et il y a $\frac{6!}{3!\times 3!} = 20$ façons de le faire).

  Une fois arrivé à 40-40, il faut maintenant que Federer fasse deux points de plus que l'adversaire :

  - Il peut le faire de suite (FF) avec une probabilité $p_3 \times p^2$.

  - Il peut perdre 1 point (A) et il devra en faire 3 (FFF) pour gagner dont deux forcément en fin de jeu. On peut donc avoir AFFF ou FAFF d'où une probabilité $p_3 \times 2 \times p^3 \times q$.

  - Il peut perdre 2 points (AA) et en faire 4 (FFFF) pour gagner avec toujours deux points en fin de jeu. Il faut cependant faire attention dans la répartition à ne pas gagner (ou perdre) avant que les 6 points aient été joués : On peut donc avoir AFAFFF, AFFAFF, FAAFFF, FAFAFF d'où une probabilité $p_3 \times 4 \times p^4 \times q^2$.

- Si il perd 3 points (AAA), il lui en faudra 5 (FFFFF) pour gagner le jeu. Comment peuvent se répartir les 3A et les 5F ?

  Pour le premier des 8 coups, on a deux possibilités (A ou F). Pour le 2ème coup, on aura qu'une seule possibilité car un début AA ou FF est interdit (le jeu se finissant par une défaite ou une victoire après seulement deux coups). Pour le 3ème coup, on a, à nouveau 2 possibilités et pour le 4ème qu'une seule (même remarque). Pour le 5ème coup : 2 possibilités et pour le 6ème : une seule. Enfin les 7ème et 8ème coup doivent être obligatoirement des points pour Federer pour qu'il puisse gagner ce jeu. On a donc $2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2^3 = 8$ façons de répartir les 3A et 5F. La probabilité de gagner le jeu après 40-40 et la perte de 3 points est donc $p_3 \times 2^3 \times p^5 \times q^3$.

- ….

On peut généraliser le raisonnement précédent (et même le démontrer par récurrence) :

Après le score de 40-40, la probabilité de gagner le jeu en perdant n points est : $p_3 \times 2^n \times p^{n+2} \times q^n$, l'entier n pouvant être en théorie infini (En pratique, le jeu le plus long a été réalisé par Anthony Fawcett et par le Britannique Keith Glass lors des Surrey Grass Court Championships le 26 mai 1975. Les deux joueurs avaient disputé un jeu long de 31 minutes, 80 points et 37 égalités. Source : Wikipédia)

En conclusion, la probabilité de gagner le jeu après un score de 40-40 est :

$$p_4 = 20p^3q^3(p^2 + 2 \times p^3 \times q + 4 \times p^4 \times q^2 + \ \dots + 2^n \times p^{n+2} \times q^n + \cdots)$$

$$p_4 = 20p^5q^3(1 + 2pq + 4p^2q^2 + \ \dots + 2^n p^n q^n + \cdots)$$

$$p_4 = 20p^5q^3(1 + 2pq + (2pq)^2 + \ \dots + (2pq)^n + \cdots)$$

Puisque $2pq < 1$ pour tout $p \in [0\,;1]$ (étudier la fonction $f(x) = 2x(1-x)$ avec $x \in [0\,;1]$ pour s'en convaincre), on a :

$$\lim_{n\to\infty} (2pq)^n = 0$$

et la somme infinie $1 + 2pq + (2pq)^2 + \ \dots + (2pq)^n + \cdots$ vaut alors $\frac{1}{1-2pq}$ (limite d'une somme des termes d'une suite géométrique)

Donc $p_4 = 20p^5q^3 \times \frac{1}{1-2pq}$

☞ Le pourcentage de chances de remporter le jeu est donc

$$P = \ p_0 + p_1 + p_2 + p_4 = p^4 + \ 4p^4q + 10p^4q^2 + 20p^5q^3 \times \frac{1}{1-2pq}$$

En remplaçant q par $1-p$, on obtient $P \ = \frac{p^4(15-34p+28p^2-8p^3)}{2p^2-2p+1}$.

En prenant $p \ = 0,72$, on obtient que le pourcentage de chances de remporter le jeu est d'environ 92 %.

Lorsque Federer n'a pas 72 % de chances de gagner le point, la fonction ci-dessous lui permettra de déterminer son pourcentage de chances de remporter le jeu :

$$f(x) = \frac{x^4(15 - 34x + 28x^2 - 8x^3)}{2x^2 - 2x + 1}$$

Sa représentation graphique sur [0 ; 1] est :

Olivier Rochoir