Sujet 3 - Un carré parfait dans une suite !

Énoncé :

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1, u_2 = 6$ et $u_{n+1}^2 - 1 - u_{n+2}u_n = 0$.

Montrer que $8u_n u_{n+1} + 1$ est un carré parfait.

Solution :

A l'aide d'un tableur, on peut calculer les premiers termes :

n	u_n	$8u_n u_{n+1} + 1$	$\sqrt{8u_n u_{n+1} + 1}$
1	1	49	7
2	6	1681	41
3	35	57121	239
4	204	1940449	1393
5	1189	65918161	8119
6	6930	2239277041	47321
7	40391	76069501249	275807

On peut alors conjecturer, en analysant la dernière colonne, que :

$$8u_n u_{n+1} + 1 = (u_n + u_{n+1})^2 \qquad \text{(P)}$$

On va démontrer cette dernière relation par récurrence :

- On a $(u_0 + u_1)^2 = 49$ et $8u_0 u_1 + 1 = 49$. La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$.
- Posons comme hypothèse de récurrence :

« Il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $\left(u_p + u_{p+1}\right)^2 = 8u_p u_{p+1} + 1$ »

On a d'après l'hypothèse de récurrence $\left(u_p + u_{p+1}\right)^2 = 8u_p u_{p+1} + 1$ ce qui donne :

$$u_{p+1}^2 - 1 - 6u_p u_{p+1} + u_p^2 = 0$$

D'après la définition de la suite (u_n), on a $u_{p+1}^2 - 1 = u_{p+2}u_p$

D'où $$u_{p+2}u_p - 6u_p u_{p+1} + u_p^2 = 0$$

Ce qui donne $$u_{p+2}^2 - 6u_{p+2}u_{p+1} + u_{p+2}u_p = 0$$

ou encore $$u_{p+2}^2 - 6u_{p+2}u_{p+1} + u_{p+1}^2 - 1 = 0$$

c'est-à-dire $$\left(u_{p+1} + u_{p+2}\right)^2 = 8u_{p+2}u_{p+1} + 1$$

L'hérédité est donc montrée.

- La propriété (P) est vérifiée pour $n = 0$ et est héréditaire, on a donc

« pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $8u_n u_{n+1} + 1 = (u_n + u_{n+1})^2$ »

ou autrement dit : **$8u_n u_{n+1} + 1$ est un carré parfait.**

■

Olivier Rochoir