Min et Max ! (Sujet n° 15)

Énoncé :

Soient x, y, z trois réels strictement positifs tels que : $x + y + z = 3$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Déterminer le minimum et le maximum des valeurs prises par $\frac{x}{y}$.

Solution :

Pour trouver le minimum et le maximum des valeurs prises par $\frac{x}{y}$, on va étudier la fonction $f(z) = \frac{x}{y}$ en exprimant x et y en fonction de z.

• On a $y = 3 - x - z$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ devient $x^2 + (3 - x - z)^2 + z^2 = 4$ qui donne le polynôme en x :

$$2x^2 + (2z - 6)\,x + 2z^2 - 6z + 5 = 0.$$

Ce polynôme a deux solutions (lorsque $-3z^2 + 6z - 1 > 0$) :

$x_1 = \frac{6 - 2z + \sqrt{(2z-6)^2 - 8(2z^2 - 6z + 5)}}{4} = \frac{3 - z + \sqrt{-3z^2 + 6z - 1}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 - z - \sqrt{-3z^2 + 6z - 1}}{2}$.

On en déduit les deux valeurs correspondantes y_1 et y_2 :

$y_1 = 3 - \frac{3 - z + \sqrt{-3z^2 + 6z - 1}}{2} - z = \frac{3 - z - \sqrt{-3z^2 + 6z - 1}}{2} = x_2$ et $y_2 = x_1$.

On étudie alors la fonction $f(z) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{3 - z + \sqrt{-3z^2 + 6z - 1}}{3 - z - \sqrt{-3z^2 + 6z - 1}}$ pour trouver ses extremums :

En posant $A = \sqrt{u}$ avec $u = -3z^2 + 6z - 1$, on a $A' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{6 - 6z}{2A} = \frac{3 - 3z}{A}$.

Et $f'(z) = \frac{(3 - z - A)(-1 + \frac{3 - 3z}{A}) - (3 - z + A)(-1 - \frac{3 - 3z}{A})}{(3 - z - A)^2}$

$f'(z) = \frac{(3 - z - A)(-A + 3 - 3z) - (3 - z + A)(-A - 3 + 3z)}{A(3 - z - A)^2}$

$f'(z) = \frac{(18 - 18z - 6z + 6z^2 + 2A^2)}{A(3 - z - A)^2}$

$f'(z) = \frac{16 - 12z}{A(3 - z - A)^2}$

Donc $f'(z) = 0$ pour $z = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ et $f'(z) > 0$ pour $z < \frac{4}{3}$ et $f'(z) < 0$ pour $z > \frac{4}{3}$.

Donc pour $z = \frac{4}{3}$ on a un maximum qui vaut $f(\frac{4}{3}) = 4 + \sqrt{15} \approx 7{,}873$

• Pour trouver le minimum, on peut étudier de la même manière la fonction $g(z) = \frac{x_2}{y_2}$ ou remarquer que $g(z) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{f(z)}$.

Le minimum de g est donc obtenu lorsque f est à son maximum et vaut $\frac{1}{4 + \sqrt{15}} = 4 - \sqrt{15} \approx 0{,}127$

☞ Le minimum des valeurs prises par $\frac{x}{y}$ est $\mathbf{4 - \sqrt{15}}$ et le maximum vaut $\mathbf{4 + \sqrt{15}}$.

Olivier Rochoir