Un peu de géométrie. (Sujet n° 14)

<u>Énoncé :</u>

Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que $AB + CD = \sqrt{2}\ AC$ et $BC + DA = \sqrt{2}\ BD$.

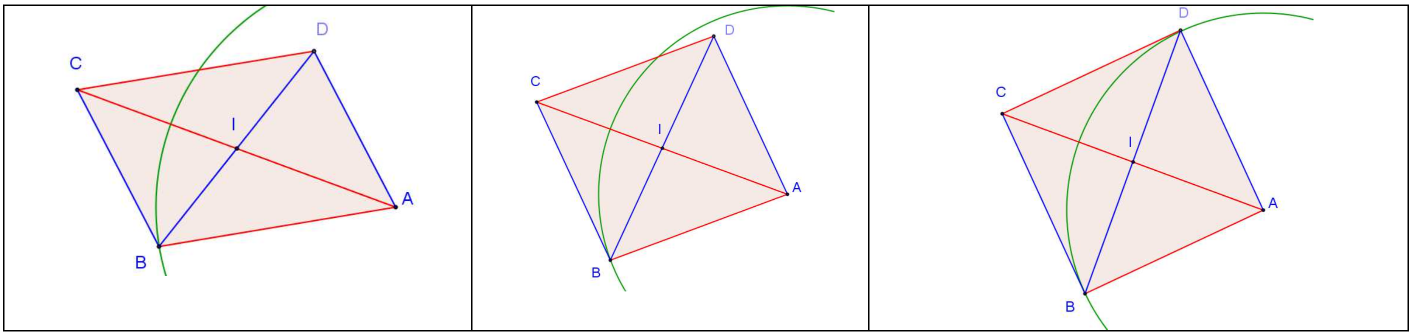
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

<u>Solution</u> :

☞ Il est clair qu'un carré ABCD vérifie ces deux égalités.

☞ Existe-t-il d'autres parallélogrammes vérifiant celles-ci ?

Soit A et C deux points et I le milieu de [AC].
Soit B un point du cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ AC et D le symétrique de B par rapport à I.



Le parallélogramme ABCD, ainsi construit, vérifie les deux relations de l'énoncé :

Puisque ABCD est un parallélogramme (les diagonales ont le même milieu), on a AB = CD et BC = DA.
On a alors $AB + CD = AB + AB = 2AB = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} AC = \sqrt{2}\ AC$ ($1^{\text{ère}}$ égalité) et BC + DA = 2 BC.

D'après le théorème de la médiane dans le triangle ABC, on a $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2}$ pour tout M.

Donc $BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{AC^2}{2}$ et puisque $AB^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2} AC)^2 = \frac{AC^2}{2}$, on en déduit que $BC^2 = 2\ BI^2$.

Donc $BC = \sqrt{2}\ BI = \frac{\sqrt{2}}{2} BD$ d'où la $2^{\text{ème}}$ égalité $BC + DA = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} BD = \sqrt{2}\ BD$.

On en déduit que les parallélogrammes construits de cette manière sont solutions de ce problème et que ceux sont les seuls (on retrouve dans le cas où l'angle $\widehat{ABC} = 90°$, le cas du carré (figure 3).

☞ Il reste à étudier le cas des quadrilatères qui ne sont pas des parallélogrammes.
…

Olivier Rochoir