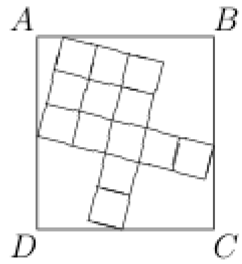
Treize carrés dans un rectangle (Sujet n° 12)

Énoncé :



On considère 13 carrés inscrits dans un rectangle ABCD avec AB = 32 et BC = 36.

Calculer l'aire d'un carré.

Solution :

Commençons par une petite remarque en considérant un carré EFCD de côté 32 et en essayant de mettre une croix constituée de 9 carrés de côté *a* telle que cette croix ait un point de contact avec tous les côtés du carré EFCD.

Il est aisé de voir qu'il y a beaucoup de solutions allant de la configuration de la figure 1 à celle de la figure 3 en passant par toutes celles de la figure 2 : il suffit de faire 'tourner' la croix autour du centre G du carré EFCD. Bien sûr, d'une configuration à l'autre, les dimensions du 'petit carré' varient afin de conserver toujours des points de contact (notés H, I, J et K ici) avec le carré EFCD.

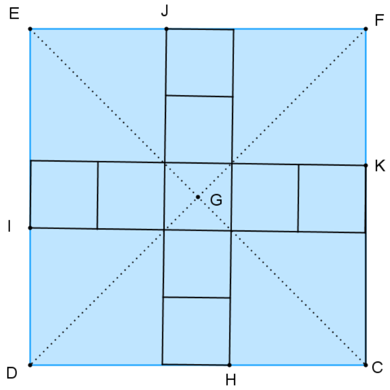


Figure 1

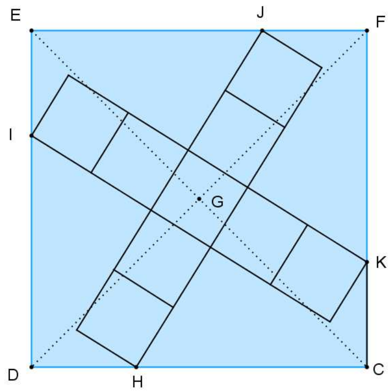


Figure 2

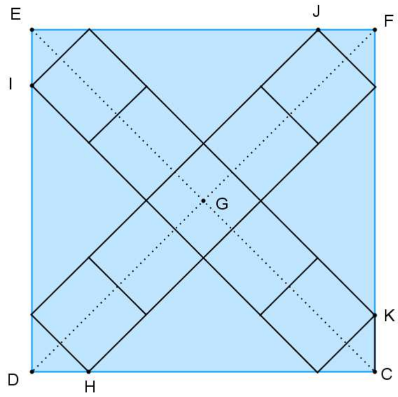
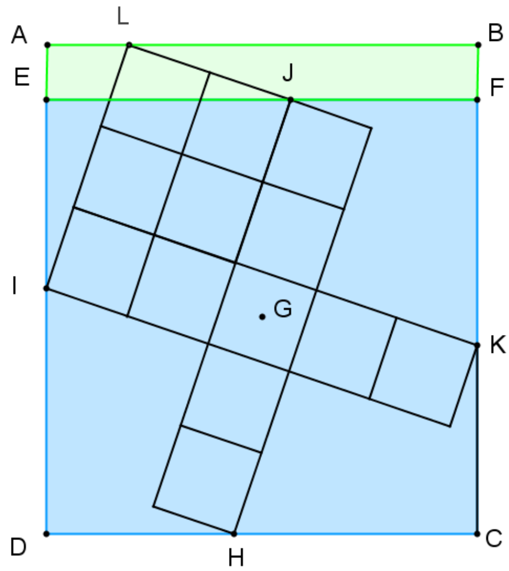


Figure 3

En complétant notre croix pour obtenir les 13 petits carrés et en faisant apparaître le rectangle ABCD de dimension AB = 32 et BC = 36, on arrive à la configuration suivante (unique) où on note L le point de contact avec le côté [AB].

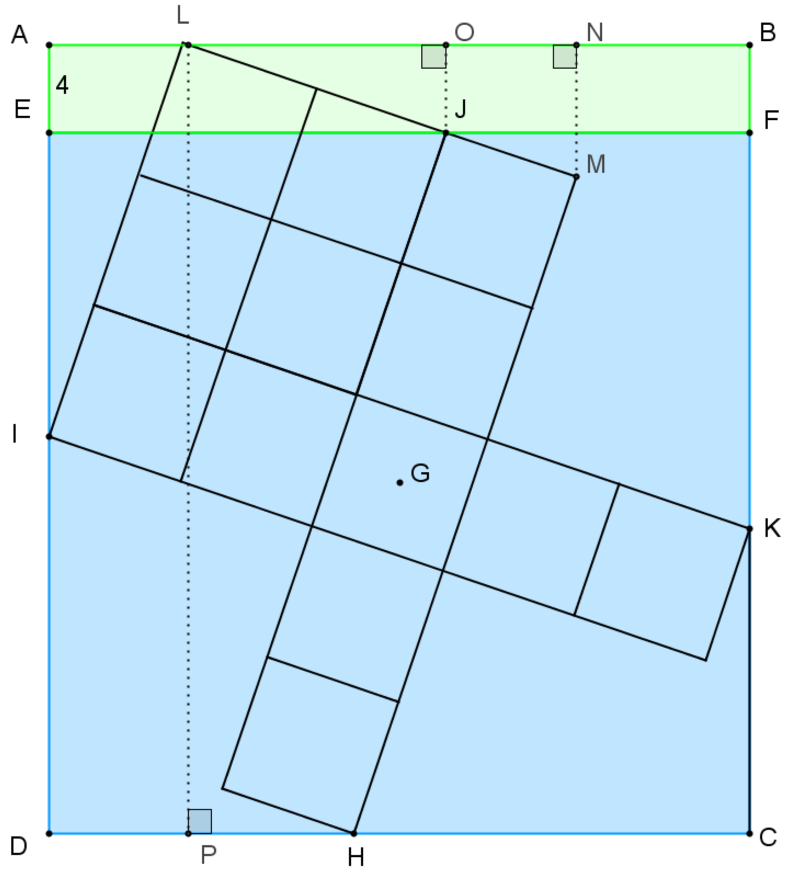


Il reste à déterminer la longueur *a* d'un petit carré.

On peut remarquer que la longueur maximale de *a* est obtenue dans le cas de la figure 3 et que dans ce cas on a : $32\sqrt{2} = \frac{a}{2} + 5a + \frac{a}{2}$ soit $a = \frac{32\sqrt{2}}{6}$.

Donc l'aire maximale d'un carré vaut $\frac{512}{9}$.

Avec les notations de la figure ci-contre, on pose EI = x et AL = y.



☞ On a donc dans le triangle ALI rectangle en A, $AI^2 + AL^2 = LI^2$. Cela donne : $(x + 4)^2 + y^2 = (3a)^2$ d'où une première relation :

$$\mathbf{(x + 4)^2 + y^2 = 9a^2} \quad ❶$$

☞ Dans le triangle LMH rectangle en M, on a $LH^2 = LM^2 + MH^2$ d'où on déduit que $LH = \sqrt{(3a)^2 + (5a)^2} = a\sqrt{34}$.

☞ Par symétrie, on a DH = IE = x et comme DP = AL = y, on en déduit que PH = x – y. On a alors dans le triangle LPH rectangle en P, $LP^2 + PH^2 = LH^2$ ce qui donne une deuxième relation :

$$\mathbf{36^2 + (y - x)^2 = 34a^2} \quad ❷$$

☞ Dans les triangles LMN et LOJ, on a d'après le théorème de Thalès $\frac{MN}{OJ} = \frac{LM}{LJ}$, d'où on déduit que $\frac{MN}{4} = \frac{3a}{2a}$ et MN = 6.

☞ Les triangles ALI et LMN étant isométriques, on en déduit que y = AL = 6.

☞ Les relations ❶ et ❷ deviennent donc $\begin{cases} x^2 + 8x + 52 = 9a^2 \\ x^2 - 12x + 1332 = 34a^2 \end{cases}$ d'où on déduit par soustraction que $20x - 1280 = -25a^2$ ou encore que $\mathbf{x = 64 - \frac{5}{4}a^2}$ ❸.

☞ En remplaçant ❸ dans ❶, on obtient l'équation : $\left(68 - \frac{5}{4}a^2\right)^2 + 36 = 9a^2$ ce qui donne $\frac{25}{16}a^4 - 179\,a^2 + 4660 = 0$ équation bicarrée qui donne pour solution $a^2 = 40$ et $a^2 = \frac{1864}{25}$ dernière valeur à exclure d'après la remarque de la première page (l'aire maximale valant $\frac{512}{9}$).

En conclusion, l'aire d'un carré est 40.

Olivier Rochoir