Une inégalité trigonométrique ! (Sujet n° 11)

Énoncé :

Montrer que pour tout $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} > 1$

Solution :

• Démontrons avant quelques résultats préliminaires :

☞ $\boxed{\text{La fonction } g(x) = x\ln(x) - x + 1 \text{ est positive pour } x \in]0 ; 1].}$

Preuve :
On a $g'(x) = \ln(x)$ donc $g'(x) \leqslant 0$ pour $x \in]0 ; 1]$ et g est décroissante sur $]0 ; 1]$. Comme $g(1) = 0$, on en déduit la positivité de la fonction g.

■

☞ $\boxed{\text{La fonction } f(x) = x^{\frac{1}{1-x}} \text{ est croissante sur }]0 ; 1[.}$

Preuve :

On a $f'(x) = \dfrac{1}{x(1-x)^2}(x\ln(x) + 1 - x)\, x^{\frac{1}{1-x}}$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x) = x\ln(x) - x + 1$. On en déduit que $f'(x) > 0$ pour $x \in]0 ; 1[$. Donc f est croissante sur $]0 ; 1[$.

■

☞ $\boxed{\text{Pour tout } x \geqslant 0 \text{ et } \alpha > 1, \text{ on a } (1 + x)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha x.}$ ❶

Preuve :
Soit $h(x) = (1 + x)^{\alpha} - 1 - \alpha x$.
On a $h'(x) = \alpha (1 + x)^{\alpha - 1} - \alpha = \alpha [(1 + x)^{\alpha - 1} - 1]$
Puisque $\alpha > 1$, le signe de $h'(x)$ est celui de $(1 + x)^{\alpha - 1} - 1$.
On a $1 + x \geqslant 1$ et $\alpha - 1 > 0$, donc $(1 + x)^{\alpha - 1} \geqslant 1$. On a alors $h'(x) \geqslant 0$ et h croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Comme $h(0) = 0$, on en déduit que $h(x) \geqslant 0$ et donc $(1 + x)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha x$.

■

☞ $\boxed{\text{Pour tout } t \in]0 ; 1[\text{ et } a \in]0 ; 1[, \text{ on a : } t^a + a^t > 1.}$

Preuve :
On peut, au vue de la symétrie de l'inégalité, supposer que $0 < t \leqslant a < 1$.

Puisque la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ est croissante sur $]0 ; 1[$, on a $0 < t^{\frac{1}{1-t}} \leqslant a^{\frac{1}{1-a}}$

La fonction $x \longmapsto x^{t-1}$ étant décroissante $(t - 1 < 0)$ sur $]0 ; +\infty[$, on en déduit : $t^{-1} \geqslant a^{\frac{t-1}{1-a}}$
Et puisque la fonction $x \longmapsto x^{1-a}$ est croissante $(1 - a > 0)$ sur $]0 ; +\infty[$, on obtient : $t^{a-1} \geqslant a^{t-1}$

On en déduit alors que $\dfrac{t^{a-1}}{a^{t-1}} \geqslant 1$. ❷

Posons alors $A = (t^a + a^t)^{\frac{1}{t}}$.

On a $A = \left[a^t\left(\dfrac{t^a}{a^t} + 1\right)\right]^{\frac{1}{t}} = a\left(\dfrac{t^a}{a^t} + 1\right)^{\frac{1}{t}}$

Ce qui, puisque $\frac{1}{t} > 1$ et $\frac{t^a}{a^t} > 0$, d'après l'inégalité ❶ donne $A \geqslant a\left(\frac{1}{t} \times \frac{t^a}{a^t} + 1\right)$

Donc $A \geqslant \frac{t^{a-1}}{a^{t-1}} + a$ et $A \geqslant 1 + a$ d'après l'inégalité ❷.
On a alors $A > 1$ et puisque $A^t = t^a + a^t$, on a bien démontré que $t^a + a^t > 1$.

■

• On peut maintenant démontrer le résultat demandé :
Soit $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, en posant $t = \cos x$ et $a = \sin x$, on a $0 < t < 1$ et $0 < a < 1$.
D'après le résultat précédent, on a $t^a + a^t > 1$ ou autrement écrit $(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x} > 1$.

Olivier Rochoir