

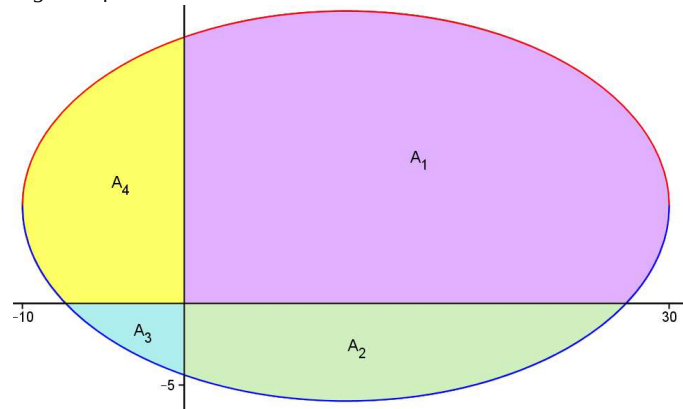
Quatre régions pour une ellipse !! (Sujet n° 7)

Énoncé :

On considère l'ellipse suivante $\frac{(x-10)^2}{400} + \frac{(y-6)^2}{144} = 1$.

On nomme les quatre régions délimitées par les axes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 (voir figure).

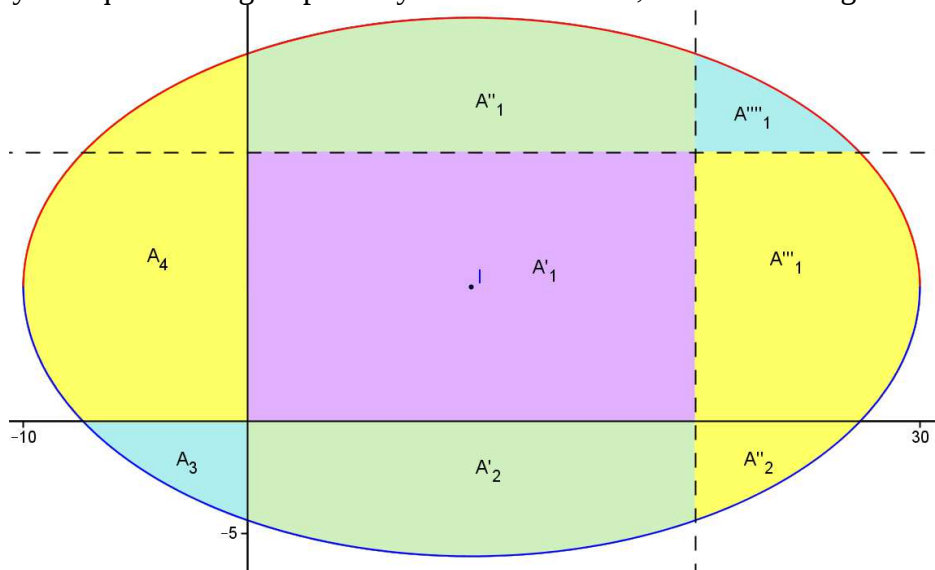
Peut-on calculer $A_1 - A_2 + A_3 - A_4$?



Solution :

Le centre I de l'ellipse a pour coordonnées (10 ; 6).

En effectuant le symétrique de la figure par la symétrie de centre I, on obtient la figure ci-dessous :



Les droites en pointillées sont les symétriques des axes de coordonnées et ont pour équation $x = 20$ et $y = 12$. En décomposant certaines régions comme indiqué sur la figure ($A_1 = A'_1 + A''_1 + A'''_1 + A''''_1$ et $A_2 = A'_2 + A''_2$), on a (du fait de la symétrie) : $A_4 = A''''_1 + A''_2$, $A_3 = A''''_1 = A''_2$ et $A'_2 = A''_1$.

On obtient alors $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = (A'_1 + A''_1 + A'''_1 + A''''_1) - (A'_2 + A''_2) + A_3 - A_4$

$A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = A'_1 + A''_1 + A'''_1 + A''''_1 - A'_2 - A''_2 + A_3 - A_4$

$A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = A'_1$

Or $A'_1 = 20 \times 12$ donc :

$$A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = 240$$