Le but initial est de déterminer l'ensemble E = { $(a,b)\in \mathbf{N}^{*2}$ / $a \leq b$ et $a^2 - t\,ab + b^2 = 1$ }
où t désigne un entier naturel fixé tel que $t \geq 2$.

Pour ce faire on souhaite étudier l'éventuelle suite vérifiant $u_1 = 1$, $u_2 = t$, et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1}{}^2 - 1 - u_n u_{n+2} = 0$

1. Un lemme préliminaire

- Montrons l'énoncé :

$\forall (a,b)\in$ E, (l'équation $b^2 - 1 - a\,x = 0$ admet une unique solution réelle c et $(b,c)\in$ E)

En effet, soit $(a,b)\in$ E. Alors en particulier $a \geq 1 > 0$ impose *a fortiori* $a \neq 0$ et ainsi l'équation du premier degré a bien une unique solution réelle c donnée par : $c = \dfrac{b^2-1}{a}$.

Remarquons ensuite que a est par définition une solution réelle (et même entière) de l'équation (clairement polynomiale de degré 2) $x^2 - t\,b\,x + (b^2-1) = 0$ qui admet donc comme « autre » solution réelle (éventuellement comptée avec multiplicité) la valeur commune $t\,b - a = \dfrac{b^2-1}{a}$ (en utilisant la somme des racines d'une part, et le produit d'autre part, sachant $a \neq 0$) : la première forme donne $c = b + (t-2)b + (b-a)$, ce qui assure que c est un entier naturel non nul (comme somme d'entiers naturels dont l'un au moins est non nul), et tel que $b \leq c$ (où on sait déjà que b est un entier naturel non nul), avec, d'après ce qui précède, $c^2 - t\,b\,c + (b^2-1) = 0$ *i.e.* $b^2 - t\,bc + c^2 = 1$: on a donc bien $(b,c)\in$ E.

2. Conséquence par récurrence

- En observant que $(1;t)\in$ E (vérification immédiate), c'est-à-dire que $(u_1,u_2)\in$ E, l'application du lemme permet d'obtenir par une récurrence immédiate que pour tout entier naturel non nul n, (u_n,u_{n+1}) est bien défini et $(u_n,u_{n+1})\in$ E, et que de plus $u_{n+2} = t\,u_{n+1} - u_n$.
- Ainsi, en notant l'ensemble F = { (u_n,u_{n+1}) : $n\in \mathbf{N}^*$ }, on a F $\subset$ E.

3. Lemme de descente

- Montrons l'énoncé :

$\forall (a,b)\in$ E / $a > 1$, l'équation $a^2 - 1 - b\,x = 0$ admet une unique solution réelle c et $(c,a)\in$ E et $c < a$

En effet, soit $(a,b)\in$ E tel que $a > 1$. Alors en particulier $b \geq a > 1 > 0$ ce qui impose *a fortiori* $b \neq 0$ et ainsi l'équation du premier degré a bien une unique solution réelle c donnée par :

$c=\frac{a^2-1}{b}$. Remarquons ensuite que b est par définition une solution réelle (et même entière) de l'équation (clairement polynomiale de degré 2) $x^2-t\,a\,x+(a^2-1)=0$ qui admet donc comme « autre » solution réelle (éventuellement comptée avec multiplicité) la valeur commune $t\,a-b=\frac{a^2-1}{b}$ (en utilisant la somme des racines d'une part, et le produit d'autre part, sachant $b \neq 0$) *:* la première forme donne que c est un entier relatif, et la seconde donne, en utilisant $1<a\leq b$, que $1<a^2\leq b\,a$ puis $0<a^2-1\leq b\,a-1<b\,a$, ce qui permet de déduire (puisque $b > 0$) : $0 < c < a$, avec, d'après ce qui précède, $c^2-t\,a\,c+(a^2-1)=0$ *i.e.* $a^2 - t\,ac + c^2 = 1$: on a donc bien $(c,a)\in$ E et $c < a$.

4. Conséquence

- Supposons par l'absurde que $E \not\subset F$:
  alors l'ensemble A = { $v\in\mathbf{N}^*$ / $\exists w\in\mathbf{N}^*$ / $(v,w)\in$ E et $(v,w)\notin$ F} est une partie non vide de **N** donc admet un minimum qu'on notera a. Et par définition, $a\in$ A donc on peut trouver un entier naturel non nul b tel que $(a,b)\in$ E et $(a,b)\notin$ F.
  - Observons d'abord que par définition, $a\in$ A donc $a \geq 1$.
  - De plus, si par l'absurde on avait $a = 1$, puisque $(a,b)\in$ E on aurait : $1^2 - t\,b + b^2 = 1$ d'où $b(b - t)=0$ où $b \neq 0$ donc nécessairement $b = t$ et ainsi on aurait $(a,b)=(1;t)=(u_1,u_2)$: contradiction avec $(a,b)\notin$ F. Ainsi $a > 1$.
  - On peut ainsi appliquer le lemme de descente à (a,b), ce qui donne un couple $(c,a)\in$ E, avec $c < a$: ainsi, comme a = Min A, $c\notin$ A, et comme $(c,a)\in$ E, nécessairement $(c,a)\in$ F : on peut ainsi fixer un entier naturel non nul n tel que $(c,a)=(u_n,u_{n+1})$.
  - D'après le lemme de descente b est solution de l'équation $u_{n+1}{}^2-1-x\,u_n=0$ donc d'après l'étude initiale, nécessairement $b = u_{n+2}$.
  - Ainsi $(a,b)=(u_{n+1},u_{n+2})$ où $n+1\in\mathbf{N}^*$ ce qui donne en particulier $(a,b)\in$ F : contradiction !
- Il découle en particulier de ce raisonnement par l'absurde, l'inclusion réciproque : $E \subset F$.
  En définitive, on a donc l'égalité E = F.

Remarques

- On peut observer que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ peut être également définie par : $u_1=1$, $u_2 = t$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+2}=t\,u_{n+1}-u_n$.
- En fait aucun couple solution (a,b) ne vérifie $a=b$ car la suite u est strictement croissante.
- Pour obtenir toutes les solutions en entiers naturels, il n'y a qu'à ajouter le couple (0;1), et « symétriser », tandis que pour obtenir toutes les solutions en entiers relatifs il suffit ensuite d'adjoindre les couples opposés.

5. Autre conséquence : résolution d'autres équations diophantiennes

- **Lemme :** soient p et q deux entiers relatifs, tels que l'équation (E) : $x^2 + px + q = 0$ d'inconnue réelle x admet au moins une solution entière r.
  Alors $p^2 - 4q$ est un carré parfait, et si de plus $p = 2p'$ avec p' entier, alors $p'^2 - q$ est un carré parfait.

  - Observons d'abord que l'équation (E) étant polynomiale de degré 2 à coefficients réels, l'existence d'une racine réelle r impose que son discriminant $\Delta = p^2 - 4q$ vérifie $\Delta \geq 0$.
  - Ainsi, en notant $r' = -p - r$, qui est ainsi un entier relatif comme différence de tels nombres, on sait que l'ensemble des solutions réelles de (E) est $\{r,r'\}$, avec

$$\{r,r'\}=\left\{\frac{-p-\sqrt{\Delta}}{2},\frac{-p+\sqrt{\Delta}}{2}\right\} \quad \text{d'où} \quad |r'-r|=\sqrt{\Delta} \quad \text{donc} \quad \Delta=(r'-r)^2 \quad \text{est un carré parfait.}$$

  - Si de plus $p = 2p'$ avec p' entier, alors $4(p'^2 - q) = \Delta = (r' - r)^2$ ce qui impose que $r' - r$ est pair également (sinon son carré serait impair !) donc de la forme $2r''$ où r'' entier, ce qui permet de conclure car alors $p'^2 - q = r''^2$.
- Notons l'ensemble B = $\{ a \in \mathbf{N}^* \,/\, \exists d \in \mathbf{N}^* \,/\, (t^2 - 4)\, a^2 + 4 = d^2 \}$, et si de plus t est pair s'écrivant $2t'$ (avec t' entier), B' = $\{ a \in \mathbf{N}^* \,/\, \exists d \in \mathbf{N}^* \,/\, (t'^2 - 1)\, a^2 + 1 = d^2 \}$.
- Notons d'autre part C = $\{ u_n : n \in \mathbf{N}^* \}$. Montrons que B = C et éventuellement B' = C :
  - Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après les études antérieures, $(u_n, u_{n+1}) \in$ E donc u_{n+1} est une solution entière de l'équation polynomiale (E) : $x^2 + px + q = 0$ d'inconnue réelle x et de coefficients $p = -t\,u_n$ (entier) et $q = u_n^2 - 1$ (entier aussi) donc, d'après le lemme précédent, $p^2 - 4q = (t^2 - 4)\,u_n^2 + 4$ est un carré parfait (nécessairement non nul), et ainsi $u_n \in$ B. Si de plus t est pair en s'écrivant $t = 2t'$ alors $p = 2p'$ avec $p' = -t'\,u_n$ (entier) et le lemme donne de plus que $p'^2 - q = (t'^2 - 1)\,u_n^2 + 1$ est un carré parfait (nécessairement non nul). Ainsi, on a alors aussi $u_n \in$ B'.
  - Le raisonnement précédent prouve l'inclusion C $\subset$ B (et l'inclusion C $\subset$ B' si t pair). Pour l'inclusion réciproque :
  - Soit $a \in$ B. Observons l'équation (E) : $x^2 - ta\,x + a^2 - 1 = 0$ d'inconnue réelle x : elle est polynomiale de degré 2, de discriminant $\Delta = (t^2 - 4)\,a^2 + 4$. Or, comme $a \in$ B :
    - On peut trouver un entier naturel non nul d tel que $\Delta = d^2$, ce qui assure $\Delta > 0$ et l'existence de deux solutions réelles dont l'une est donnée par $b=\frac{ta+d}{2}$ où d ayant même parité que ta (car d a même parité que d^2 qui a lui-même même parité (par ajout d'un pair) que $d^2 + 4a^2 - 4 = t^2 a^2$ qui a même parité que ta), b est entier, et vérifie $b \geq \frac{ta}{2} \geq a$ avec $a^2 - t\,ab + b^2 = 1$, ainsi $(a,b) \in$ E.

- On a donc, d'après l'étude précédente, l'existence d'un entier naturel non nul n tel que $(a,b) = (u_n,u_{n+1})$: en particulier on a $a = u_n$. Et ainsi $a \in$ C.

- Si de plus t est pair : soit $a \in$ B'.
  - Pour la même équation (E) : comme $a \in$ B', on peut fixer un entier naturel non nul d tel que $\Delta = 4\,d^2$, ce qui assure $\Delta > 0$ et l'existence de deux solutions réelles dont l'une est $b = t'a + d$: ainsi b est nécessairement entier, vérifie $b \geq t'a \geq a$ et de plus en tant que solution de (E), on a : $a^2 - t\,ab + b^2 = 1$, donc $(a,b) \in$ E.
  - On a donc, d'après l'étude précédente, l'existence d'un entier naturel non nul n tel que $(a,b) = (u_n,u_{n+1})$: en particulier on a $a = u_n$. Et ainsi $a \in$ C.

- En définitive, on a donc l'égalité B = C, et si t est pair, B' = C.

Remarques

- On peut observer que la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ des racines carrées de $(t^2 - 4)\,u_n^2 + 4$ est donnée par : $d_1 = t$, $d_2 = t^2 - 2$ et pour tout entier naturel non nul n, $d_{n+2} = t\,d_{n+1} - d_n$.
- Si de plus $t = 2\,t'$ avec t' entier, la suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ des racines carrées de $(t'^2 - 1)\,u_n^2 + 1$ est donnée par : $\delta_1 = t'$, $\delta_2 = 2\,t'^2 - 1$ et pour tout entier naturel non nul n, $\delta_{n+2} = t\,\delta_{n+1} - \delta_n$.

- On peut, pour obtenir les solutions en entiers naturels (éventuellement nuls), ajouter $u_0 = 0$, et observer que la suite u ainsi complétée vérifie encore la même relation de récurrence, et qu'il suffit de même d'ajouter $d_0 = 2$, et éventuellement $\delta_0 = 1$ si t est pair (la même relation de récurrence restant globalement vérifiée aussi), ce qui simplifie une façon de présenter les deux suites, tout en adaptant les énoncés d'ensemble de solutions en entiers naturels.

Autre présentation des principaux résultats obtenus :

- t désignant un entier fixé tel que $t \geq 2$:
  - $\{ (a,b) \in \mathbf{N}^2 \,/\, a \leq b \text{ et } a^2 - t\,a\,b + b^2 = 1 \} = \{ (u_n,u_{n+1}) : n \in \mathbf{N} \}$ où la suite u est définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = t\,u_{n+1} - u_n$.
  - $\{ (a,b) \in \mathbf{N}^2 \,/\, (t^2 - 4)\,a^2 + 4 = b^2 \} = \{ (u_n,d_n) : n \in \mathbf{N} \}$ où la suite d est définie par $d_0 = 2$, $d_1 = t$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $d_{n+2} = t\,d_{n+1} - d_n$.
  - Autre formulation : $\{ (a,b) \in \mathbf{N}^2 \,/\, (t^2 - 4)\,a^2 + 4 = b^2 \} = \{ c_n : n \in \mathbf{N} \}$ où la suite de couples c est donnée par : $c_0 = (0;2)$, $c_1 = (1;t)$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $c_{n+2} = t\,c_{n+1} - c_n$.

- τ désignant un entier naturel non nul fixé (en utilisant $t = 2\tau$) :

  $\{ (a,b)\in \mathbf{N}^2 / \quad (\tau^2 - 1)\, a^2 + 1 = b^2 \} = \{ c_n : n\in \mathbf{N} \}$ où la suite de couples c est donnée par : $c_0 = (0;1)$, $c_1 = (1;\tau)$ et $\forall n\in \mathbf{N}$, $c_{n+2} = 2\tau c_{n+1} - c_n$.

Remarques :

- Le cas $t = 2$ et le cas $\tau = 1$ sont un peu particuliers car alors pour tout entier naturel n, $u_n = n$ et $d_n = 1$, et le second ensemble cherché n'a pas vraiment d'intérêt posé ainsi !

- Pour les cas entiers non pris encore en compte :

  - Le cas $t = 1$ se résout facilement pour les deux équations :
    - $\{ (a,b)\in \mathbf{N}^2 / \ a \le b$ et $a^2 - ab + b^2 = 1 \} = \{ (0;1) \}$
    - $\{ (a,b)\in \mathbf{N}^2 / \ -3a^2 + 4 = b^2 \} = \{(0;2),(1;1) \}$

  - Le cas $t = 0$ et le cas $\tau = 0$ se résolvent facilement aussi :
    - $\{ (a,b)\in \mathbf{N}^2 / \ a \le b$ et $a^2 + b^2 = 1 \} = \{(0;1)\}$
    - $\{ (a,b)\in \mathbf{N}^2 / \ -4a^2 + 4 = b^2 \} = \{(0;2),(1;0) \}$
    - $\{ (a,d)\in \mathbf{N}^2 / \ -a^2 + 1 = b^2 \} = \{(0;1),(1;0) \}$

  - Le cas d'un entier $t < 0$ ne correspond à aucune solution en entiers naturels (pour la première équation diophantienne : l'autre revient à la même qu'en $-t$), et pour les solutions en entiers relatifs, cela se ramène facilement à un cas précédent :

    $\{ (a,b)\in \mathbf{Z}^2 / \ a^2 - t\,ab + b^2 = 1 \} = \{(a,b)\in \mathbf{Z}^2 / \ a^2 - (-t)\, a\, (-b) + (-b)^2 = 1 \}$