1. Des solutions assez élémentaires

- Il est immédiat de décomposer en facteurs premiers : 2014 = 2 x 19 x 53
- La somme des chiffres de 2014 est 7 (qui ne divise pas 2014), celle de 2x2014 (=4028) est 14 (qui ne convient pas non plus, ni aucune somme de leurs multiples), celle de 3x2014 (=6042) est 12, qui ne va pas non plus, mais avec 2014 répété 106 fois puis 6042 répété 106 fois (ce qui fait un nombre à 848 chiffres) on obtient une première solution.
- On peut aussi considérer que 5x14+3x12=106 et qu'ainsi répéter 4028 95 fois puis 6042 57 fois, on obtient une solution avec 32x19 (=608) chiffres.
- Mais en observant que 4x2014 (=8056) la somme des chiffres vaut 19 et qu'ainsi **en répétant 8056 106 fois** on obtient un nombre de 424 chiffres qui est solution du problème.

2. Forme générale d'un candidat à être le plus petit nombre solution

- La division euclidienne donne : 2014 = 9 x 223 + 7, ainsi le plus petit nombre dont la somme des chiffres vaut 2014 est 799....9 (où il y a 223 fois le chiffre 9). Mais comme il est impair, il ne peut être multiple de 2014.
- Pour conserver la même somme avec le même nombre de chiffres, il n'y a globalement qu'une solution : remplacer un couple 7,9 par un couple 8,8. Le nouveau plus petit candidat possible est ainsi 8899....9 (où il y a 222 fois le chiffre 9), qui est toujours impair, et ainsi s'il y a une solution avec 224 chiffres, elle ne peut être que de la forme 9....989....98 (où il y a globalement 222 fois le chiffre 9).
- Il suffit donc de trouver (si elle existe) la plus petite valeur de l'entier naturel k entre 0 et 222 de sorte que le nombre $N = 10^{224} – 2 – 10^{(223-k)}$ soit multiple simultanément de 19 et 53 (puisqu'il l'est automatiquement de 2).

3. Obtention de la solution

- Divisibilité par 19 :

  Le petit théorème de Fermat assure (puisque 19 est premier) que 10^{18} est

congru à 1 modulo 19 (et on peut vérifier que l'ordre de 10 est bien 18 exactement dans le groupe multiplicatif (**Z**/19**Z**)*).

* Comme 224 = 18 x 12 + 8, on a $10^{224} \equiv 10^8$ [19] *i.e.* (en calculant facilement $10^2 \equiv 5$ [19] puis $10^4 \equiv 6$ [19] puis...) $10^{224} \equiv -2$ [19] et ainsi $10^{224} - 2 \equiv -4$ [19].

* Il s'agit ainsi de savoir quelles sont les puissances de 10 congrues à -4 modulo 19 :

étant donné que 10^7 convient (vérification aisée), et avec la remarque initiale, on a ainsi que **N est multiple de 19** (en plus de l'être déjà de 2) **si et seulement si** $223 - k \equiv 7$ [18] i.e. **k multiple de 18** (puisque 216 = 18 x 12).

- Divisibilité par 53 :

On vérifie ici qu'en fait l'ordre de 10 dans le groupe multiplicatif (**Z**/53**Z**)* est exactement 13 (soit le quart de 52), et avec des calculs analogues au cas de 19, on obtient :

* Comme 224 = 13 x 17 + 3, on a $10^{224} \equiv 10^3$ [53] *i.e.* $10^{224} \equiv -7$ [53] et ainsi $10^{224} - 2 \equiv -9$ [53].

* Il s'agit ainsi de savoir quelles sont les puissances de 10 congrues à -9 modulo 53 :

étant donné que 10^{11} convient (vérification aisée), et avec le même raisonnement que précédemment : **N est multiple de 53 si et seulement si** $223 - k \equiv 11$ [13] *i.e.* **$k \equiv 4$ [13]** (puisque 212 = 13 x 16 + 4).

- Synthèse et conclusion :

il suffit de tester successivement les multiples de 18 à partir de 0 jusqu'à avoir un reste 4 dans la division par 13 (et sans dépasser 222) :

0 (reste 0), 18 (reste 5), 36 (reste 10), 54 (reste 2), 72 (reste 7), 90 (reste 12), **108** (**reste 4**) : le plus petit nombre solution est $\mathbf{N = 10^{224} - 2 - 10^{115}}$

c'est-à-dire le nombre s'écrivant en écriture décimale

999...98999....98 où il y a d'abord 108 fois le chiffre 9 puis une fois le chiffre 8 puis 114 fois le chiffre 9 puis le chiffre 8, pour un total de 224 chiffres.