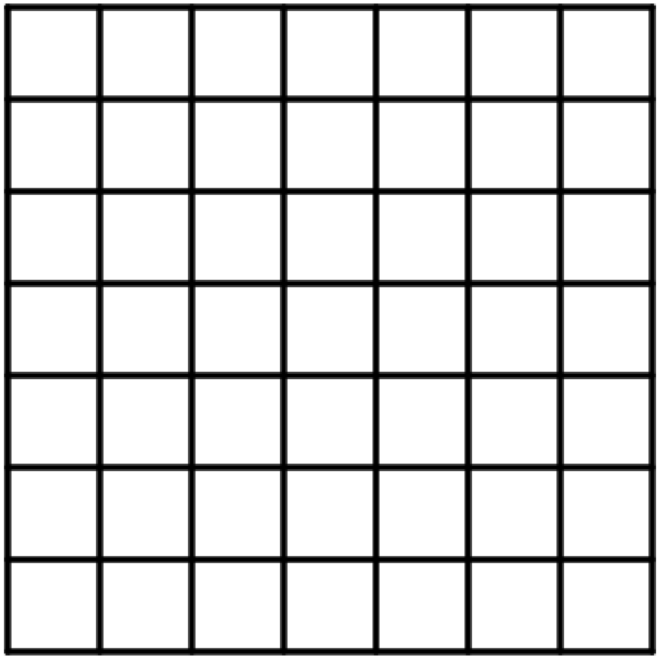
Placement de points

Noan BODIN, Ylane BOIRE,
Thomas HADJADJ--CHAMPEAU, Helian VACHIN

Paul Guerin | Niort
Cité scolaire

Présentation du problème

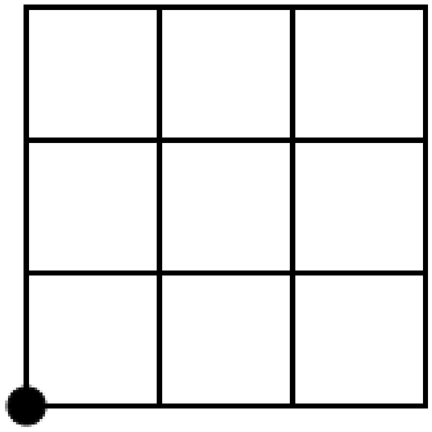
Dans une grille carrée quelconque, nous souhaitons placer autant de points que possible, et les joindre deux à deux de sorte que les distances observées soient toutes différentes.



Présentation du problème

Par exemple, pour une grille de taille 3.

On part du point en bas à gauche,

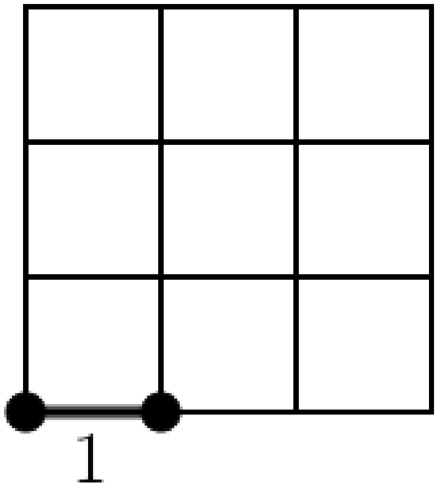


Présentation du problème

Par exemple, pour une grille de taille 3.

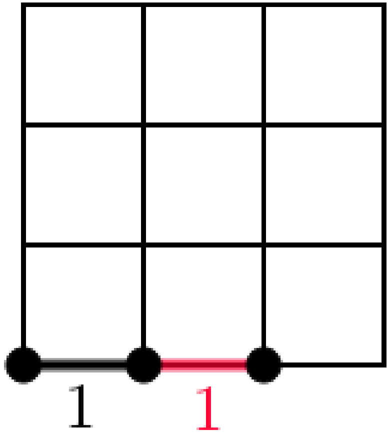
On part du point en bas à gauche,
et on peut choisir son voisin direct.

Ce qui nous donne la longueur 1.



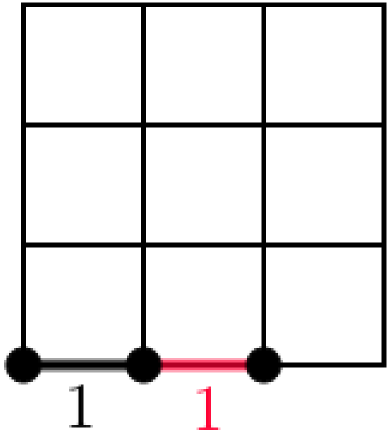
Présentation du problème

On ne peut pas reprendre
le point d'à-côté,
sinon on retrouverait la longueur 1.

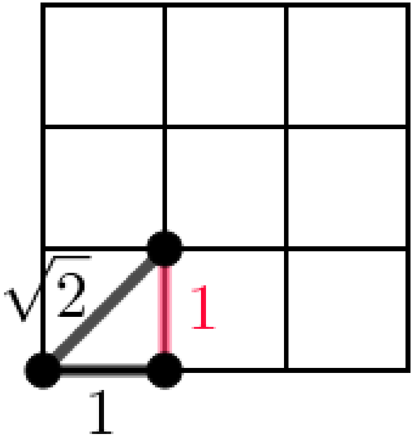


Présentation du problème

On ne peut pas reprendre
le point d'à-côté,
sinon on retrouverait la longueur 1.

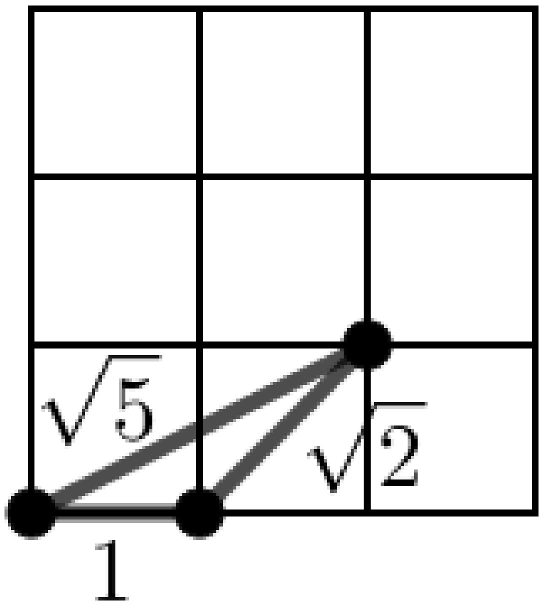


Ni le point situé juste au-dessus,
car on créerait la longueur $\sqrt{2}$, mais on
retrouverait aussi la longueur 1.



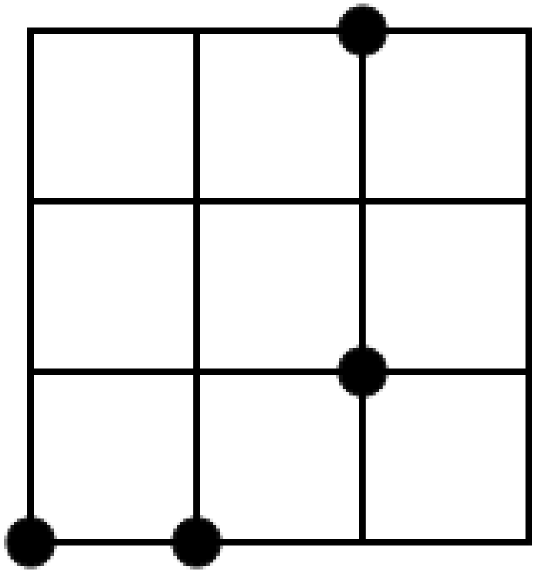
Présentation du problème

Ces considérations nous amènent à choisir comme troisième point celui indiqué :



Présentation du problème

Et, après plusieurs essais, nous en sommes arrivés à ces 4 points, qui engendrent les distances $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$



Notation

Dans la suite, nous noterons :

n, la taille du carré (la *longueur* de ses côtés)

Ainsi, la grille consistera en un carré de $(n+1)$ points sur $(n+1)$ points.

Et nous recherchons donc le nombre de longueurs distinctes que l’on peut créer dans cette grille.

Remarque initiale

Si l'on utilise p points dans une grille.

Le premier est relié aux (p-1) autres points.
Le suivant est relié aux (p-2) points restants.
…
L'avant dernier est relié au dernier point.

Remarque initiale

Si l'on utilise p points dans une grille.

On a donc $(p\text{-}1) + (p\text{-}2) + \ldots + 1$ segments.

En conclusion, avec p points, nous créons

$\dfrac{p(p-1)}{2}$ segments.

(éventuellement de même longueur…)

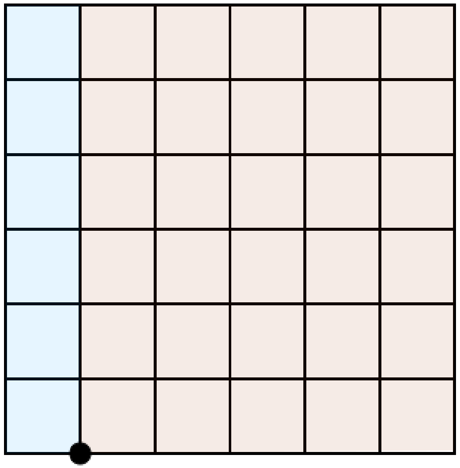
Placement du premier point

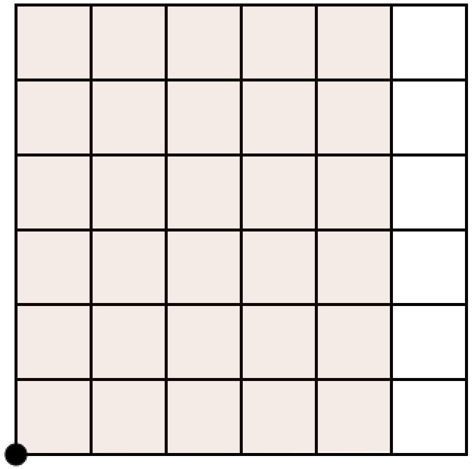
Remarque :

On peut décider de placer le premier point sur un des coins.

Placement du premier point

En partant d’un autre point, on créerait moins de longueurs que celles atteintes en partant d’un coin.





Car la zone bleue est une zone qui ne contient que des longueurs que l’on peut déjà créer dans l’autre zone.

Premiers constats

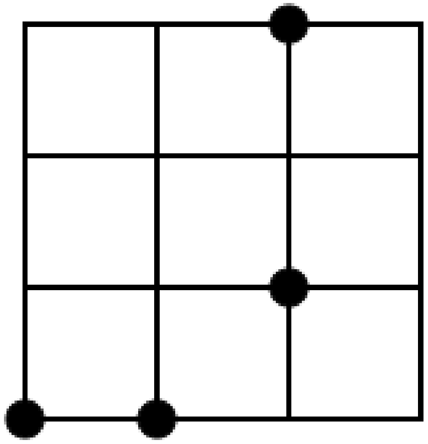
- On note n la taille du carré. La grille est composée de $(n+1)$ points par côté.

- À partir de p points, on crée $\dfrac{p(p-1)}{2}$ segments.
(*éventuellement de même longueur…*)

- Le premier point que l'on choisira sera toujours celui en bas à gauche.

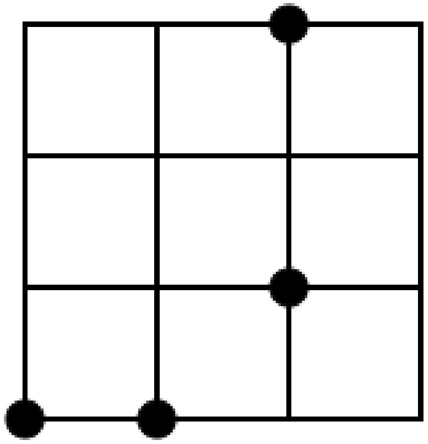
Résolution du cas $n = 3$

Nous avons proposé précédemment une solution utilisant 4 points.



Résolution du cas $n = 3$

Nous avons proposé précédemment une solution utilisant 4 points.

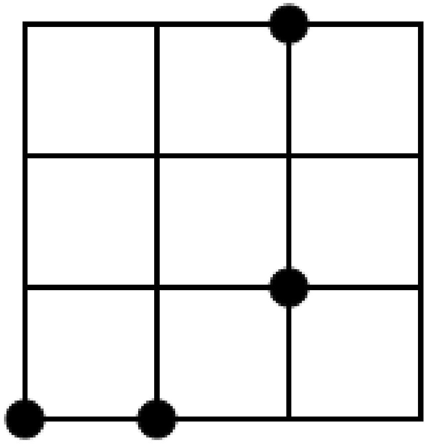


Avec 5 points, nous chercherions

$$\frac{5\times4}{2}=10 \text{ longueurs distinctes.}$$

Résolution du cas $n = 3$

Nous avons proposé précédemment une solution utilisant 4 points.



Avec 5 points, nous chercherions $\frac{5\times4}{2}=10$ longueurs distinctes.

Or, dans une telle grille, on crée au maximum 9 longueurs distinctes : $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{18}$

Résolution du cas $n = 3$

Nous en déduisons qu'il n'existe pas de solutions avec 5 points dans une grille de taille $n = 3$.

Ainsi, notre solution avec 4 points est l'une des solutions utilisant le plus de points dans une grille de taille $n = 3$.

Résolution du cas $n = 4$

Pour le cas d'une grille de taille 4.
Nous procédons de la même manière :

5 points demanderaient $\dfrac{5\times 4}{2}=10$ longueurs distinctes.

6 points demanderaient $\dfrac{6\times 5}{2}=15$ longueurs distinctes.

Résolution du cas n = 4

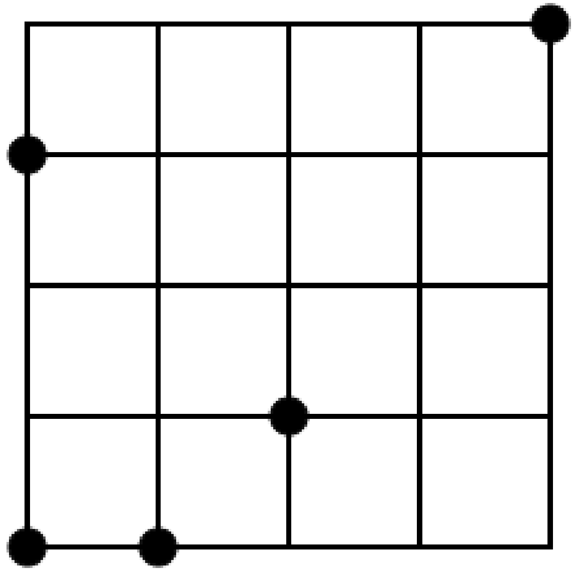
Mais, dans une grille de taille 4, on ne peut créer que 14 longueurs distinctes :

$$1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{13}, 4, \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{20}, 5, \sqrt{32}$$

Il n'est donc pas possible de placer 6 points (ce qui utiliserait 15 segments).

Résolution du cas n = 4

Et nous avons une solution utilisant 5 points.



Nous en déduisons que pour une grille de taille 4, on place au maximum 5 points.

Une conjecture

Pour une grille de taille 3, nous avons trouvé 4 points.

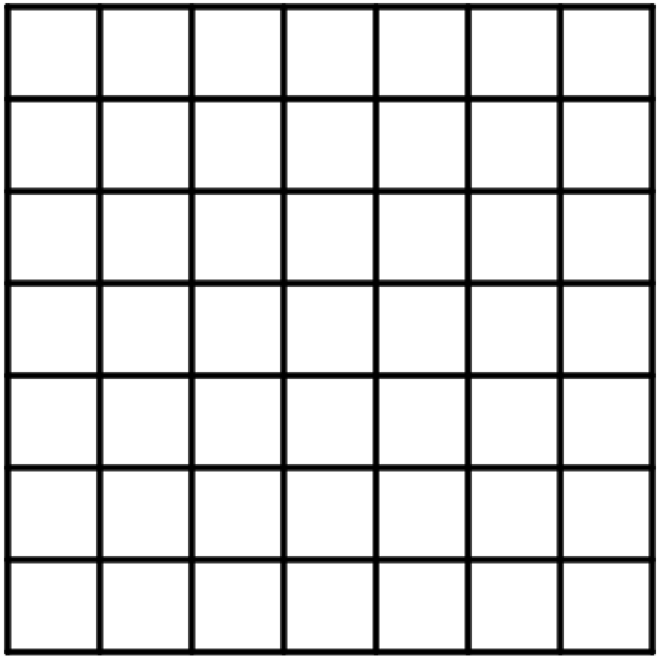
Pour une grille de taille 4, nous avons trouvé 5 points.

<u>Conjecture :</u>
Pour une grille de taille n, est-ce que le maximum p de points que l'on peut placer serait $n + 1$?

Majoration du nombre de points

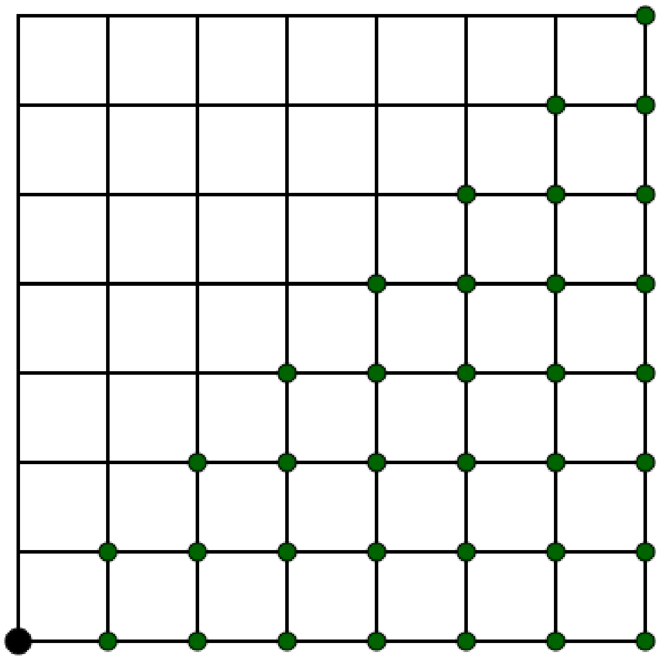
Pour étudier cette conjecture :
On se place dans le cas d'une grille de taille n quelconque.

Et nous allons commencer par majorer le nombre de longueurs distinctes que l'on peut obtenir.



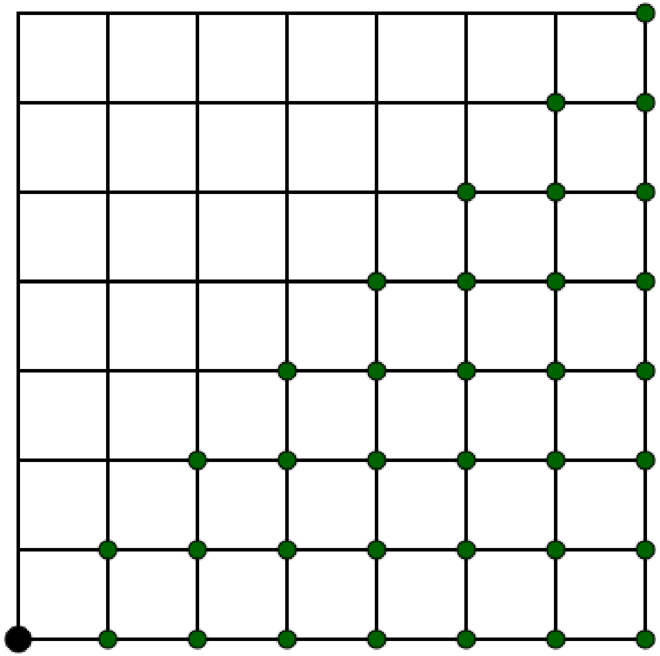
Majoration du nombre de points

<u>Remarque :</u>
Nous ne nous intéresserons qu'aux segments joignant le coin bas-gauche avec les points de la diagonale ou en-dessous, car ils permettent de calculer toutes les longueurs possibles, *éventuellement en les répétant*.



Majoration du nombre de points

Pour dénombrer ces segments :
On compte le nombre de points autres que celui du coin bas-gauche, quitte à retrouver une longueur déjà trouvée.



Il y en a $n + n + (n\text{-}1) + \ldots + 1$, ou encore $\sum_{k=1}^{n+1} k - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$

Majoration du nombre de points

Ainsi, dans une grille de taille n, on a au plus $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ longueurs distinctes.

Et on rappelle que si on veut placer p points, cela demanderait $\frac{p(p-1)}{2}$ longueurs distinctes.

Or, si $p \geqslant n+2$: $\frac{p(p-1)}{2} \geqslant \frac{(n+2)(n+1)}{2} > \frac{(n+2)(n+1)}{2}-1$

Majoration du nombre de points

On en déduit que l'on ne peut pas avoir $p \geqslant n+2$.

Propriété.
Dans une grille de taille n, le nombre maximal p de points que l'on peut placer, de sorte que toutes les longueurs obtenues soient distinctes, vérifie $p \leqslant n+1$.

Nombre exact de points ?

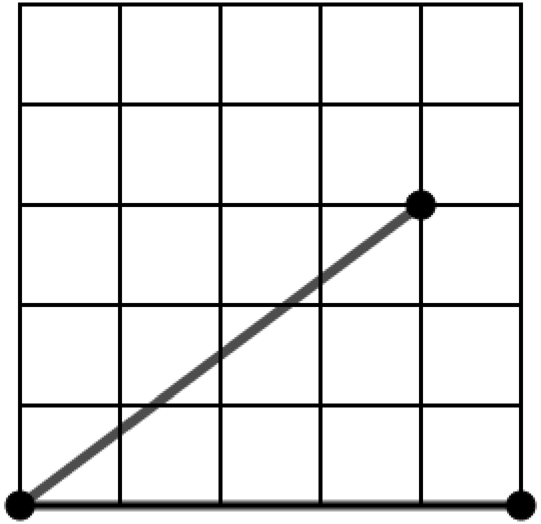
Est-ce que ce nombre maximum de points peut-être égal à $n+1$ pour une taille de grille n quelconque ?

C'est ce que nous avions trouvé pour les grilles de taille 3 et de taille 4.

Premiers ennuis pour $n \geq 5$

Pour les grilles de taille $n \geq 5$, on commence à avoir deux différents types de segments qui ont la même longueur, ce qui crée des répétitions.

Ce qui complique le calcul du nombre de longueurs distinctes, et qui *pourrait* faire du résultat précédent un majorant large.



Pistes de réflexion

Piste 1 :

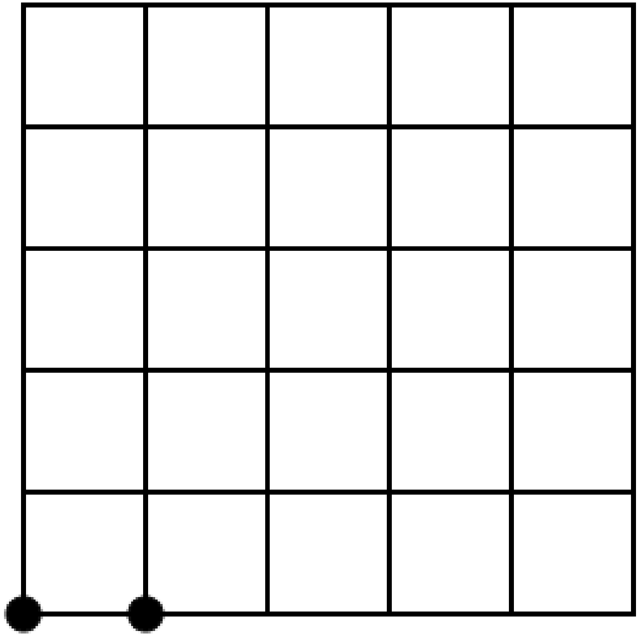
Dénombrer les entiers a , inférieurs à un n donné, qui s'écrivent comme une somme de deux carrés non nuls.

Et vérifier si certains d'entre eux peuvent être obtenus de plusieurs façons.

Afin de pouvoir retirer ces répétitions de notre somme précédente.

Pistes de réflexion

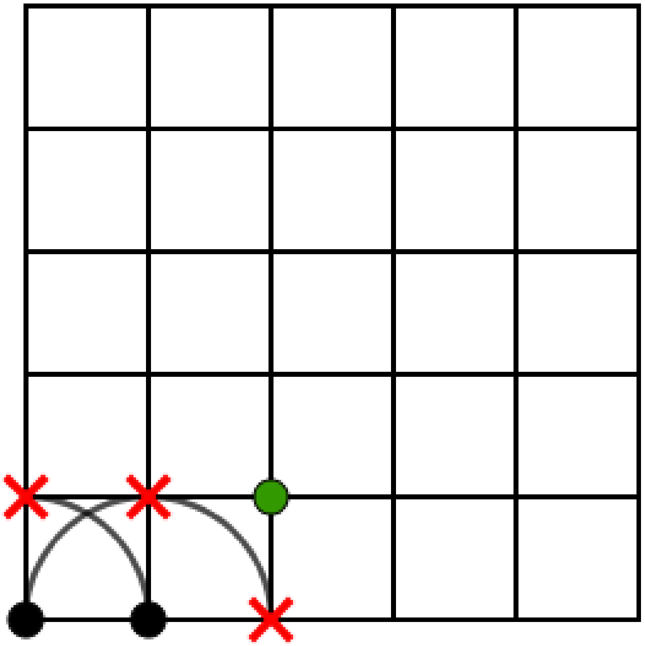
Piste 2 : Proposer des processus automatiques pour choisir des points.



On part du coin bas-gauche,
et on prend un autre point.

Pistes de réflexion

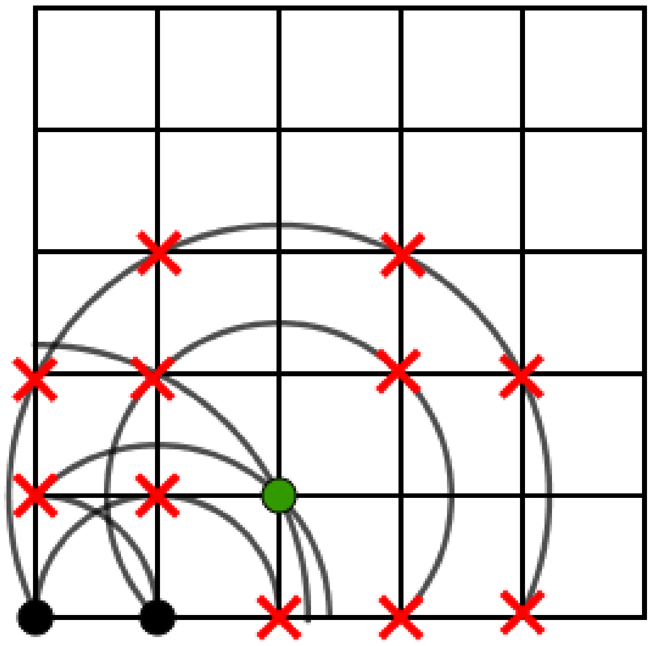
Piste 2 : Proposer des processus automatiques pour choisir des points.



On trace les arcs de cercles que l’on peut, ils éliminent des points. On prend un autre point possible.

Pistes de réflexion

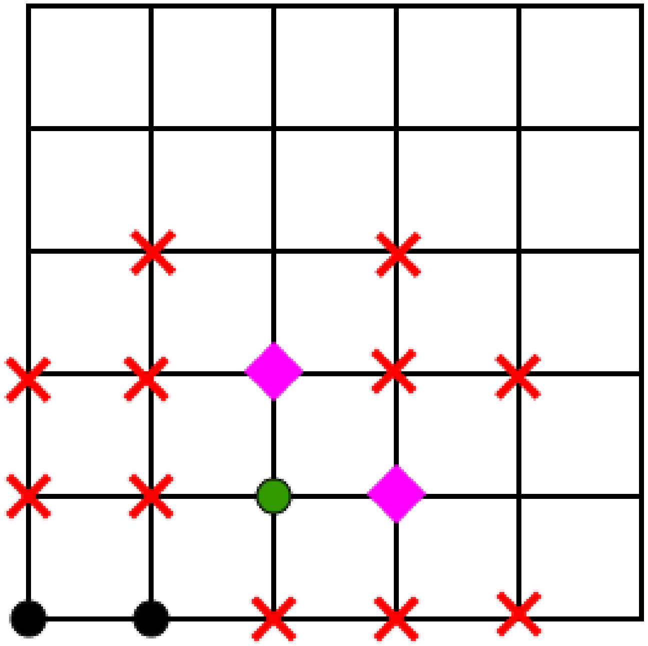
Piste 2 : Proposer des processus automatiques pour choisir des points.



Et on recommence...

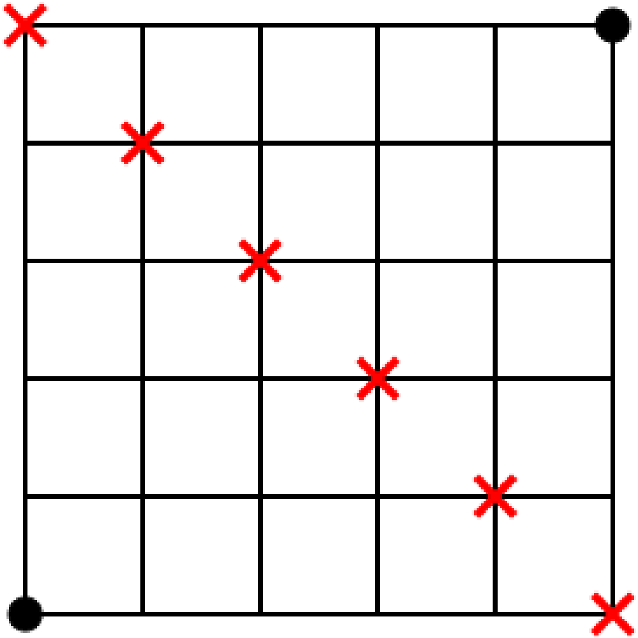
Pistes de réflexion

Piste 2 : Proposer des processus automatiques pour choisir des points.



Problème : Il faudrait aussi tracer les cercles dont le rayon est une longueur obtenue entre deux points autres que le centre, car ça élimine aussi les deux points roses.

Pistes de réflexion



On a aussi d'autres règles.

Par exemple, entre deux points, tous les points situés sur leur médiatrice sont interdits.

Sinon on crée deux segments de même longueur ...

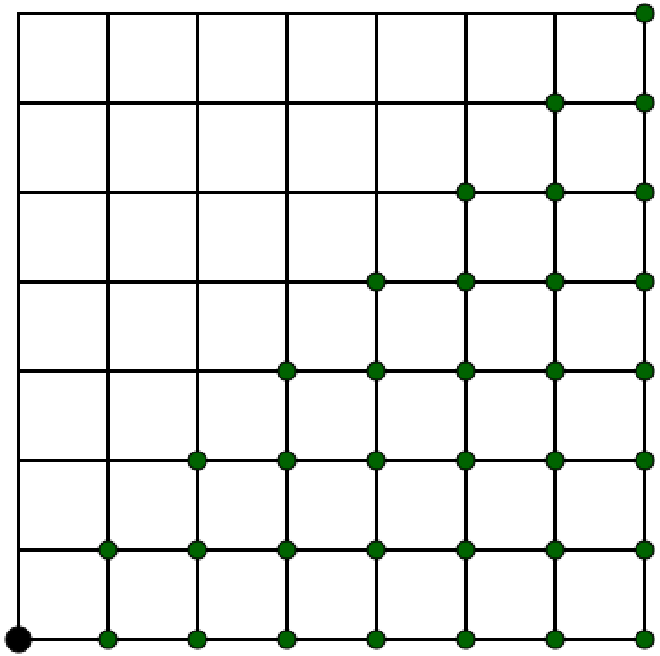
Algorithmique

L'étude générale semblant difficile :

Nous nous sommes donc tournés vers la conception d'algorithmes, afin de formuler des conjectures.

Algo 1 : nombre de répétitions

Notre premier algorithme liste toutes les longueurs possibles dans une grille de taille *n* quelconque, en liant un coin et tous les points situés sur la diagonale, ou en-dessous.

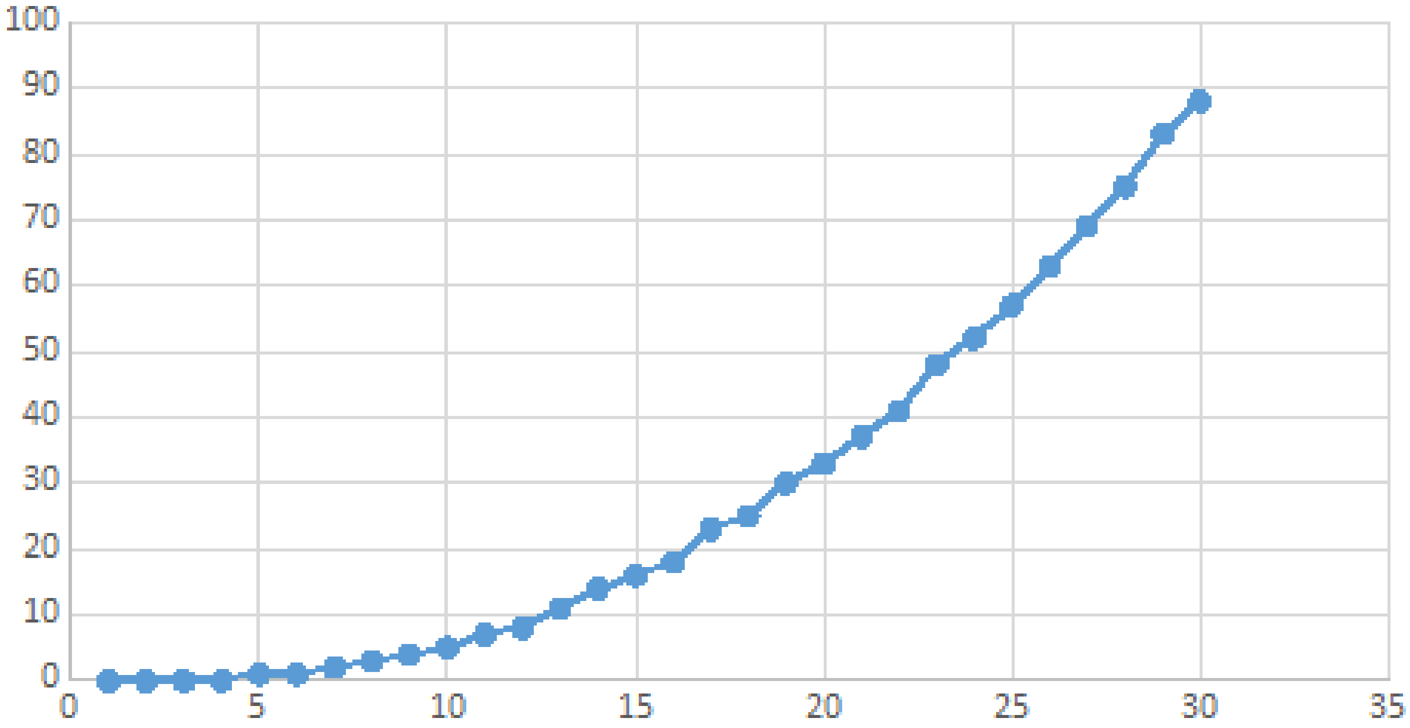


Puis notre algorithme affiche le nombre de répétitions que l’on trouve.

Algo 1 : nombre de répétitions

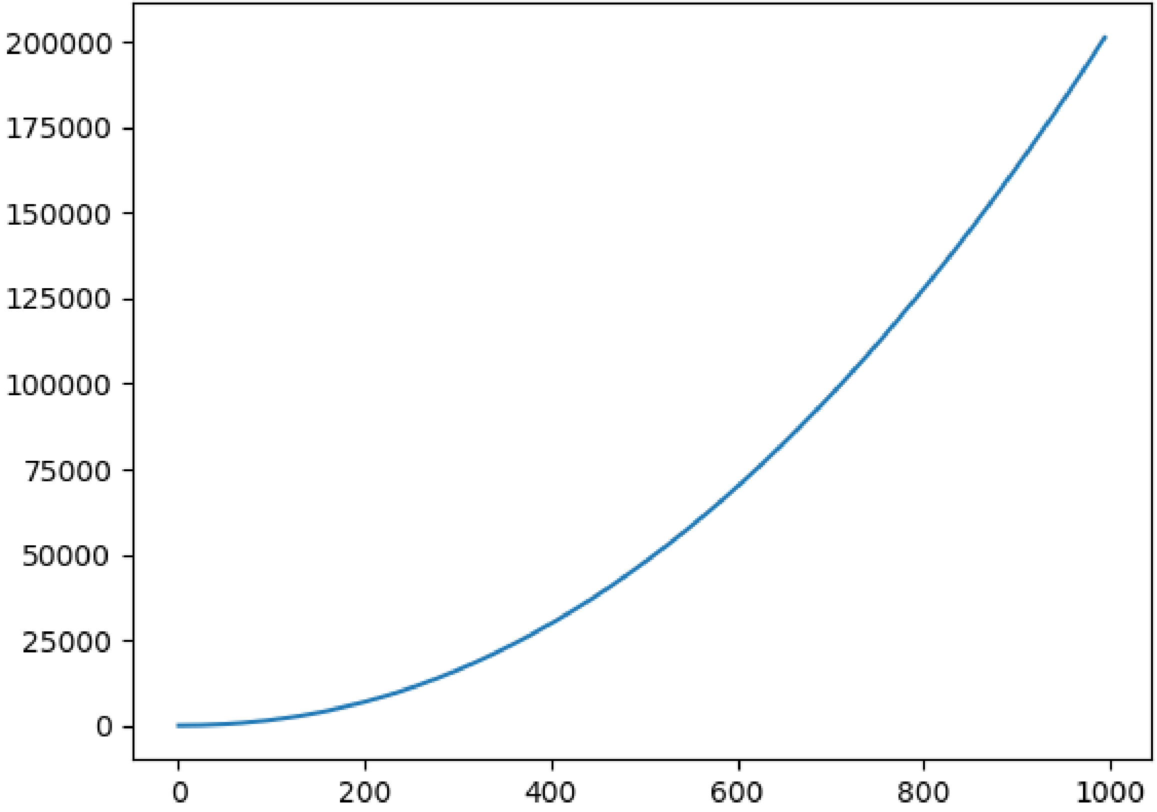
```
l=200
M=[]
L=[]
for n in range(6,l):
    for x in range(1,n+1):
        for y in range(0,x+1):
            L.append(x**2+y**2)
    M.append(len(L)-len(set(L)))
    list.clear(L)
print(M)
a=l-5
A=[]
for b in range(1,a):
     A.append(b)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(A, M)
plt.show()
```

Algo 1 : nombre de répétitions



Nombre de répétitions pour de petites valeurs de *n*

Algo 1 : nombre de répétitions



Nombre de répétitions pour de grandes valeurs de n

Algo 1 : nombre de répétitions

Nous conjecturons que le nombre de répétitions, selon la taille n de la grille, suit une croissance exponentielle.

Algo 2 : trois points au hasard

Dans un deuxième algorithme :
Nous avons commencé à dénombrer le nombre de manières de placer trois points dans une grille.

Puis nous avons calculé la probabilité que 3 points placés ainsi (au hasard dans une grille de taille n quelconque) soient tels que les segments les connectant soient de longueurs deux à deux distinctes.

Algo 2 : trois points au hasard

```
import itertools
taille=int(input("taille grille"))
lcoord=[]
for x in range (0,taille+1):
    for y in range (0,taille+1):
        lcoord.append([x,y])
print(lcoord)  # facultatif
def distance(A,B):
    return int(((B[0]-A[0])**2+(B[1]-A[1])**2))
for a in range(taille,-1,-1):
    print(a)
def dessin(solution):
    for y in range (taille,-1,-1):
        print(end="\n")
        for x in range (0,taille+1):
            if [x,y] in solution :
                print("X", end=" ")
            else :
                print("#", end=" ")
```

Algo 2 : trois points au hasard

```
def construction3():
    verifc = 0
    sol = []
    long = len(lcoord)
    ldma = []
    ldverif =[] #facultatif
    for a in range (0,long):
        p1 = lcoord[a]
        print(p1)
        for b in range (a+1, long):
            ldma.clear()
            p2 = lcoord[b]
            d0 = distance(p1,p2)
            ldma.append(d0)
            for c in range (b+1,long):
                if verifc == 1 :
                    del ldma [1:]
                    verifc=0
                p3 = lcoord[c]
                d1 = distance(p1,p3)
                d2 = distance(p2,p3)
                v1 = d1 not in ldma and d1 != d2
                v2 = d2 not in ldma
                if v1 and v2 :
                    ldma.append(d1)
                    ldma.append(d2)
                    ldverif.append([d0,d1,d2]) # facultatif
                    sol.append([p1,p2,p3])
                    verifc += 1
    print("Voici la liste des solutions trouvées :")
    for i in range (0, len(sol)):
      print(i+1, sol[i], "distances d0, d1, d2 :", ldverif[i])
    des =input("1 = schéma des solutions")
    if des == "1" :
        for i in range (0, len(sol)):
            print(i+1, dessin(sol[i]),)
construction3()
```

Algo 2 : trois points au hasard

Pour une grille de taille $n = 2$, l’algorithme trouve 40 solutions.

Comme il y a une combinaison de 3 parmi 9 points à placer (donc 84 possibilités), on en déduit que l’événement « *trois points pris au hasard dans une grille de taille* $n = 2$ *créent des longueurs toutes différentes* » a pour probabilité 40/84, soit environ 47,62 %.

Algo 2 : trois points au hasard

Pour une grille de taille n =3, la probabilité vaut environ 69,3 %
Pour une grille de taille n =4, la probabilité vaut environ 77,6 %
Pour une grille de taille n =5, la probabilité vaut environ 83 %
Pour une grille de taille n =6, la probabilité vaut environ 86,5 %
Pour une grille de taille n =7, la probabilité vaut environ 89,2 %
Pour une grille de taille n =8, la probabilité vaut environ 90,9 %

<u>En cours :</u> Adapter l’algorithme pour 4 points, k points...

Merci pour votre attention !